WS 2008/2009

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Yvonne Deuster

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.

(a) Die Exponentialabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} = \cos t + i \sin t \end{array}$$

ist, bezüglich der Beschreibung von S^1 als differenzierbare Mannigfaltigkeit wie in der Vorlesung, ein lokaler Diffeomorphismus.

(b) $\mathbb{R}P^1$ ist diffeomorph zu S^1.

Aufgabe 2.

(a) Für differenzierbare Abbildungen

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R$$

zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und $p \in M$ gilt die Kettenregel

$$T_p\,(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$$

(b) Sei $h\colon U \to U'$ eine Karte einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, d.h. $U \subset M$ und $U' \subset \mathbb{R}^m$ sind offen, und h ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, daß h aufgefaßt als Abbildung zwischen der Mannigfaltigkeit U und der Mannigfaltigkeit U' (als Teilmenge von M bzw. $\mathbb{R}^m$) ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3. Wegen Aufgabe 2 induziert eine Karte (U, h) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M einen Vektorraumisomorphismus

$$T_p h \colon T_p M \longrightarrow T_{h(p)}\mathbb{R}^m$$

für jedes $p \in U$. Seien $u^1, ..., u^m$ cartesische Koordinaten auf dem $\mathbb{R}^m$. Schreibe

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p := T_{h(p)}h^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}|_{h(p)}\right), \quad p \in U.$$

(a) Zeigen Sie mittels der Definition des Differentials, daß dies konkret folgendes bedeutet: $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p M$ ist der Tangentialvektor, der angewandt auf $\varphi \in C^\infty(M)$ das folgende liefert:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (\varphi) = \frac{\partial(\varphi \circ h^{-1})}{\partial u^i}(h(p)).$$

(b) Sei $\varphi \colon \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x, y, z) = x^2 + z$ und sei $p = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \in \mathrm{S}^2$. Sei (U, h) die Karte, mit $U = \{z > 0\} \cap \mathrm{S}^2$ und $h(x, y, z) = (x, y)$. Zeigen Sie, daß die partiellen Ableitungen von φ im Punkt p gegeben sind durch $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p (\varphi) = \sqrt{2} - 1$ und $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p (\varphi) = 0$. Sei nun (V, k) die Karte, die durch $V = \{x > 0\} \cap \mathrm{S}^2$ und $k(x, y, z) = (y, z)$ gegeben ist. Zeigen Sie, daß bezüglich dieser Karte für die Ableitungen im Punkt p gilt $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p (\varphi) = 0$ und $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p (\varphi) = 1 - \sqrt{2}$.

Aufgabe 4. Zeigen sie die folgenden Eigenschaften der Lie-Klammer:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$

(ii) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$

(iii) Jacobi-Identität: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Sei (U, h) eine Karte von M und $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ die entsprechende Basis von $T_p M$ für $p \in M$. Dann gilt

(iv) $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$

(v) Für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ mit $X^i, Y^j \in C^\infty(U)$ ist $[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$ (vgl. Übungsblatt 8)

Bonusaufgabe. Zeigen Sie durch explizites Rechnen in homogenen Koordinaten, daß die Fläche, die man durch Herausschneiden einer Kreisscheibe $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ aus $\mathbb{R}P^2$ erhält, diffeomorph zu einem Möbiusband ist.

Abgabe: Montag 26.01.2009

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI