

# Elementare Differentialgeometrie

## Übungsblatt 2

**Aufgabe 1.** Eine **Helix** war definiert als reguläre Kurve  $\alpha$  im  $\mathbb{R}^3$ , für die ein  $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  existiert mit  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \rangle = \text{konst.}$  Eine **Kreis-Helix** ist eine Helix, deren Projektion auf eine Ebene orthogonal zu  $\mathbf{u}$  ein Kreis ist.

Zeigen Sie:  $\alpha$  ist eine Kreis-Helix genau dann, wenn  $\tau = \text{konst.} \neq 0$  und  $k = \text{konst.} > 0$  gilt.

**Aufgabe 2.** Sei  $\alpha$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit  $k \neq 0$ . Finden Sie eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{w}$ , so daß

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{N}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{N}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{B}.\end{aligned}$$

**Bemerkung.**  $\mathbf{w}$  heißt **Darboux-Vektor**. Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) untersuchte Kurven unter einem kinematischen Gesichtspunkt. Wenn ein starrer Körper mit Einheitsgeschwindigkeit entlang einer Kurve läuft, so beschreibt  $\mathbf{T}$  die infinitesimale Translation des Körpers und  $\mathbf{w}$  die infinitesimale Rotation.

**Aufgabe 3.** Sei  $\alpha$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit  $k \neq 0$ . Die von  $\mathbf{T}(s)$  und  $\mathbf{N}(s)$  aufgespannte Ebene durch  $\alpha(s)$  heißt die **Schmiegebene** von  $\alpha$  in  $\alpha(s)$ . Zeigen Sie, daß  $\alpha$  genau dann in einer Ebene liegt, wenn es einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^3$  gibt, so daß jede Schmiegebene durch  $\mathbf{x}_0$  geht.

**Aufgabe 4.** Sei  $\alpha$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $k(s) \neq 0$ ,  $k'(s) \neq 0$  und  $\tau(s) \neq 0$  für alle  $s$ . Zeigen Sie, daß die Spur von  $\alpha$  genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn  $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = \text{konst} > 0$ , wobei  $\rho := 1/k$  und  $\sigma := 1/\tau$ .

**Hinweis.** Für die Hin-Richtung, drücke  $\alpha(s) - \mathbf{m}$  als Linearkombination von  $\mathbf{N}(s)$  und  $\mathbf{B}(s)$  aus, wobei  $\mathbf{m}$  den Mittelpunkt der Sphäre bezeichnet. Dies liefert dann auch den gewünschten Ansatz für die Rück-Richtung.