Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Yvonne Deuster

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Flächenstücke

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, \log t) \\ \text{und}\qquad &\mathbf{y}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, \varphi) \end{aligned}$$

für $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$.

(a) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten (g_{ij}) bzw. $(\widetilde{g}_{ij})$ für die beiden Flächenstücke, und zeigen Sie damit, daß $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ **keine** Isometrie ist.

(b) Zeigen Sie, daß $K(\mathbf{x}(t,\varphi)) = K(\mathbf{y}(t,\varphi)) = -\frac{1}{(1+t^2)^2}$.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Umkehrung des *theorema egregium* i.a. falsch ist: Ein Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ zwischen Flächen, der $K_M(p) = K_N(\varphi(p))$ erfüllt für alle $p \in M$, muß keine lokale Isometrie sein.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß die Isometrien $\varphi\colon M \to M$ einer Fläche M in natürlicher Weise eine Gruppe bilden, die sogenannte **Isometriegruppe** von M.

(b) Zeigen Sie, daß die Isometriegruppe von S^2 gleich der Gruppe der orthogonalen $(3\times 3)-$Matrizen ist.

Aufgabe 3. Ein Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ heißt **konforme Abbildung**, falls

$$\langle d\varphi(\mathbf{X}), d\varphi(\mathbf{Y})\rangle_{\varphi(p)} = \lambda(p)\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle_p$$

für alle $p \in M$ und $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_pM$, wobei $\lambda\colon M \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion ist. Analog zum Begriff der lokalen Isometrie spricht man von **lokal konformen** Abbildungen. Zeigen Sie, daß S^2 lokal konform zur Ebene ist.
Hinweis: stereographische Projektion

Aufgabe 4. Betrachten Sie die sogenannte Enneperfläche, gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right),$$

und zeigen Sie:

(a) Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind $g_{11} = g_{22} = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2,\ g_{12} = 0$.

(b) Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind $L_{11} = 2,\ L_{22} = -2,\ L_{12} = 0$.

(c) Die Hauptkrümmungen sind $k_1 = -k_2 = 2/\left(1 + u^2 + v^2\right)^2$.

(d) Die Krümmungslinien sind die Koordinatenkurven.

(e) Die asymptotischen Kurven sind gegeben durch $u + v =$ konst. und $u - v =$ konst.

Bonusaufgabe. (a) Seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Vektorfelder auf einer Fläche M. In einer Parametrisierung $\mathbf{x}\colon U \to M$ definiere

$$Z^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j},$$

wobei $\mathbf{X} = X^i \mathbf{x}_i$ und $\mathbf{Y} = Y^j \mathbf{x}_j$. Analog definiere in der Parametrisierung $\mathbf{y}\colon V \to M$

$$\overline{Z}^\alpha = \overline{X}^\beta \frac{\partial \overline{Y}^\alpha}{\partial v^\beta} - \overline{Y}^\beta \frac{\partial \overline{X}^\alpha}{\partial v^\beta}.$$

Zeige: $Z^i = \overline{Z}^\alpha \partial u^i / \partial v^\alpha$. Das bedeutet, daß $Z^i \mathbf{x}_i = \overline{Z}^\alpha \mathbf{y}_\alpha = \mathbf{Z}$ ein Vektorfeld ist. $\mathbf{Z}$ wird mit $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ bezeichnet und heißt **Lie-Klammer** von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$. Zeige:

(i) $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = 0$.

(ii) $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$.

(iii) $\left[u^1 \mathbf{x}_2, u^1 u^2 \mathbf{x}_1\right] = \left(u^1\right)^2 \mathbf{x}_1 - u^1 u^2 \mathbf{x}_2$.

(b) Sei $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Dabei bezeichne $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ die in der Bonusaufgabe von Übung 5 eingeführte kovariante Ableitung von $\mathbf{Y}$ bezüglich $\mathbf{X}$. Zeige: $\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$.

Bemerkung. $\mathbf{T}$ heißt **Torsion** und ist für allgemeinere kovariante Ableitungen nicht Null.

(c) Zeige: $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ ist die Orthogonalprojektion auf T_pM der Richtungsableitung von $\mathbf{Y}$ in Richtung von $\mathbf{X}$.

Abgabe: Montag 08.12.08

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI