Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 10

Sei K ein (endlicher) Simplizialkomplex der Dimension n. Schreibe α_i für die Anzahl der i-Simplexe von K. Die **Euler-Charakteristik** von K ist definiert als

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i \ .$$

Die ersten drei Aufgaben befassen sich mit dieser kombinatorisch definierten Euler-Charakteristik. Wir werden später in der Vorlesung die Euler-Charakteristik als topologische Invariante kennenlernen.

Aufgabe 1. Ist K ein **Graph**, d.h. ein eindimensionaler Komplex mit $|K|$ zusammenhängend, so gilt $\chi(K) \leq 1$. Gleichheit gilt genau dann, wenn K ein Baum ist.

Aufgabe 2. Seien $K, L \subset \mathbb{R}^n$ Simplizialkomplexe, die sich in einem gemeinsamen Unterkomplex $K \cap L$ schneiden. Dann gilt

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L) \ .$$

Aufgabe 3. Die Euler-Charakteristik ändert sich nicht bei baryzentrischer Unterteilung, d.h.

$$\chi(K) = \chi(K^1) \ .$$

Aufgabe 4. Der Simplizialkomplex K sei die Vereinigung zweier Simplizialkomplexe K_1 und K_2, so daß $K_1 \cap K_2$ eine Ecke ist (**simpliziale Einpunkvereinigung**). Dann gilt

$$H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)$$

für $q > 0$. Was ist im Fall $q = 0$?

Bonusaufgabe. Zu jeder endlichen Folge $G_1, \dots, G_n$ endlich erzeugter abelscher Gruppen gibt es einen Simplizialkomplex K mit $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(K) \cong G_q$ für $1 \leq q \leq n$, sowie $H_q(K) = 0$ für $q > n$.

Knobelaufgabe. Auf wie viele verschiedene Arten (bis auf Homöomorphismus) kann man n Bänder an eine 2-Scheibe ankleben? Hier bedeutet **Band** eine Kopie von $I \times I$, und das **Ankleben** geschieht mittels einer stetigen Abbildung $f\colon \{0,1\} \times I \to \partial D^2$, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Abgabe: Montag 21.12.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI