WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

# Topologie

Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.** (a) Die Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$0 \to \mathbb{Z}_3 \to G \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \to 0$$

sei exakt. Dann ist $\alpha$ ein Isomorphismus und $G$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_6$.

(b) Eine **kurze exakte Sequenz** abelscher Gruppen ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0.$$

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Es gibt einen Homomorphismus $\lambda\colon C \to B$, so daß $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}_C$.
- Es gibt einen Homomorphismus $\mu\colon B \to A$, so daß $\mu \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Unter diesen Bedingungen sagt man, daß die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Zeigen Sie weiter, daß dann $B \cong A \oplus C$.

N.B.: Eine spaltende kurze exakte Sequenz *nicht-abelscher* Gruppen $A, B, C$ entspricht im allgemeinen einem sogenannten *semi-direkten* Produkt von $A$ und $C$.

(ii) Ist $C$ eine freie abelsche Gruppe, so spaltet jede kurze exakte Sequenz der obigen Form. (Falls Ihnen der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereitet, diskutieren Sie zumindest den Fall $C \cong \mathbb{Z}$.)

**Aufgabe 2.**

(a) Jede exakte Sequenz der Form

$$0 \to \mathbb{Z}_m \to G \to \mathbb{Z}_n \to 0\ ,$$

mit $m$ und $n$ teilerfremd, spaltet.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2} \to \mathbb{Z}_n \to 0\ .$$

Spaltet diese Sequenz?

(c) Geben Sie für $n \geq 2$ zwei nicht zueinander isomorphe abelsche Gruppen $G$ an, für die eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}_n \to 0$$

existiert.

b.w.

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz die Homologie

(i) der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$, aufgefaßt als der Raum, den man durch Verkleben eines Möbiusbandes mit einer 2-Scheibe erhält;

(ii) des 2-Torus, erhalten durch das Verkleben zweier Zylinder;

(iii) der Kleinschen Flasche, ebenfalls erhalten durch das Verkleben zweier Zylinder.

**Aufgabe 4.** Seien $L, M$ Unterkomplexe des Simplizialkomplexes $K = L \cup M$ mit $|K|, |L|, |M|$ wegzusammenhängend. Leiten Sie aus der Mayer–Vietoris-Sequenz eine Beschreibung der ersten Homologie-Gruppe $H_1(L \cup M)$ als Quotientengruppe von $H_1(L) \oplus H_1(M)$ unter gewissen zusätzlichen Relationen her, in Analogie zum Satz von Seifert und van Kampen.

**Bonusaufgabe.** Zeigen Sie mittels Lemma 7.9 aus der Vorlesung, daß $i_q j_q \colon C_q(K^1) \to C_q(K^1)$ kettenhomotop zur Identität ist. Überlegen Sie sich dazu, daß die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt sind, wenn man für ein $q$-Simplex $\sigma \in K^1$ den Unterkomplex $L(\sigma) \subset K^1$ definiert als die baryzentrische Unterteilung des $q$-Simplexes von $K$, das $\sigma$ enthält.

**Knobelaufgabe.** Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] & B_2 \arrow[r, "j_2"] & B_3 \arrow[r, "j_3"] & B_4 \arrow[r, "j_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Bestimmen Sie die minimalen Annahmen an $f_1, f_2, f_4, f_5$ (bzgl. Injektivität und Surjektivität), die garantieren, daß $f_3$

(i) injektiv

(ii) surjektiv

(iii) bijektiv

ist. Zeigen Sie durch Beispiele, daß diese Annahmen nicht weiter abgeschwächt werden können.

Abgabe: Montag 11.1.10

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI