WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Euler-Charakteristik der Flächen S^2, $\#_g T^2$ und $\#_h \mathbb{R}P^2$. Welche Euler-Charakteristik hat die Fläche mit Rand, die man aus einer der obigen Flächen erhält, indem man k disjunkte offene Kreisscheiben herrausschneidet?

Aufgabe 2. Seien K und L zwei Simplizialkomplexe. Beschreiben Sie eine Triangulierung von $|K| \times |L|$, und zeigen Sie damit, daß gilt:

$$\chi\big(|K| \times |L|\big) = \chi\big(|K|\big) \cdot \chi\big(|L|\big).$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß der n-dimensionale Torus $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n Faktoren) die Euler-Charakteristik 0 hat

(a) mit Aufgabe 2,

(b) durch Beschreiben einer freien simplizialen $\mathbb{Z}_2$-Operation auf T^n (geeignet trianguliert) mit Quotient T^n. *Hinweis:* Hier wird keine Homologie mit $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten benötigt.

Aufgabe 4. Seien $A_1, \ldots, A_n$ beschränkte, konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, den wir mit $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Ein Punkt $x \in S^n$ bestimmt eine Hyperebene $H_x \subset \mathbb{R}^n$ als den Schnitt von $\mathbb{R}^n$ mit dem Teilraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ senkrecht zu x. Definiere $f_i(x)$ als das Volumen des Teiles von A_i, der auf derselben Seite von H_x liegt wie x. Definiere $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ durch $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Verwenden Sie den Satz von Borsuk-Ulam, um das *Schinkensandwich-Theorem* zu folgern: Es gibt eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, die jedes A_i in zwei Teile gleichen Volumens teilt. Der Beweis der Stetigkeit von f ist als Bonusaufgabe anzusehen.

Bonusaufgabe. (a) Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, die zu einer stetigen Abbildung $F\colon D^{n+1} \to S^n$ erweitert. Dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

(b) Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung mit geradem Abbildungsgrad. Dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Bonusaufgabe. Verifizieren Sie, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_q(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t_*"] \arrow[d, "\overline{f}_*"'] & H_q(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\overline{f}_*"'] & H_{q-1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\overline{f}_*"'] \\
H_q(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t_*"] & H_q(S^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\pi_*"] & H_q(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\Delta"] & H_{q-1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

aus dem Beweis von Satz 8.10 kommutiert.

Abgabe: Montag 25.1.10

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI