WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

# Topologie

Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Man fasse $S^1$ als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus $f_*\colon\ \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, wenn

(i) $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\pi/2)}$,

(ii) $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ für $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ e^{i(2\pi-\theta)}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

**Aufgabe 2.** Seien $u$ und $v$ Schleifen in einer topologischen Gruppe $G$ mit Basispunkt $e$, dem Einselement von $G$. Sei $u * v$ die durch $u * v(s) = \mu(u(s), v(s))$, $s \in [0,1]$, definierte Schleife, wobei $\mu\colon\ G \times G \to G$ die Multiplikation in $G$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß

$$uv \simeq u * v \simeq vu \ \text{ rel } \{0,1\},$$

und folgern Sie daraus, daß $\pi_1(G,e)$ abelsch ist.

**Aufgabe 3.** Sei $X$ ein topologischer Raum und $f\colon\ S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definiere wie in der Vorlesung

$$X \cup_f D^2 = (X + D^2)/x \sim f(x) \text{ für } x \in S^1 = \partial D^2.$$

(a) Falls $f, g\colon\ S^1 \to X$ homotope Abbildungen sind, so gilt

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2.$$

(b) Die Narrenkappe ist der topologische Raum, den man aus einem gleichseitigen Dreieck erhält, indem man die drei Seiten wie in Abbildung 1 angegeben identifiziert. Beschreiben Sie die Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einer geeigneten Abbildung $f\colon\ S^1 \to S^1$ und zeigen Sie mit (a), daß die Narrenkappe zusammenziehbar ist.

b.w.

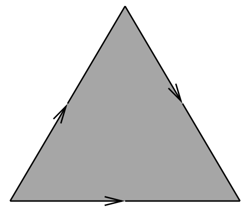

Abbildung 1: Die Narrenkappe.

**Aufgabe 4.** Der *komplex projektive Raum* $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon (x_0, \ldots, x_n) = (\lambda y_0, \ldots, \lambda y_n) .$$

Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0, \ldots, x_n)$ bezeichnet man mit *homogenen Koordinaten* $(x_0 : \ldots : x_n)$. (Dieser Name erklärt sich daraus, daß $(x_0 : \ldots : x_n) = (\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n)$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.) Man kann $\mathbb{C}P^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen.

Die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit $\infty$ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ seien genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Zeigen Sie:

(a) $\widehat{\mathbb{C}}$ ist tatsächlich ein kompakter topologischer Raum. (Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum $X$ heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls für jedes System von offenen Mengen $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ (mit $A$ einer beliebigen Indexmenge), das $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ erfüllt, eine Auswahl von endlich vielen Mengen $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$ existiert mit $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_m}$.)

(b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}P^1 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (z_0 : z_1) & \mapsto & \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ist ein Homöomorphismus.

Abgabe: Montag 9.11.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI