WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Es seien M, N, M', N' Mengen. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Menge

$$(M \times N) \setminus (M' \times N')$$

im allgemeinen verschieden ist von der Menge

$$(M \setminus M') \times (N \setminus N').$$

Zeigen Sie, andererseits, daß $(M \times N) \setminus (M' \times N')$ stets als Vereinigung zweier Mengen der Form $A \times B$ geschrieben werden kann.

Hinweis: Zeichnen Sie eine Skizze (z.B. mit Teilmengen von $\mathbb{R}$), die die Fragestellungen veranschaulicht.

Aufgabe 2. Gegeben seien Mengen A, B, C und Abbildungen $f\colon\ A \to B$ und $g\colon\ B \to C$. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Bedingung "f ist surjektiv" in (c) nicht weggelassen werden kann.

Aufgabe 3. Es seien M, N Mengen und $f\colon\ M \to N$ eine Abbildung. Weiter seien A und B Teilmengen von M, sowie C und D Teilmengen von N. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Kann man die falsche(n) Aussage(n) zu (einer) richtigen Aussage(n) machen, indem man die Mengengleichheit zu einer Mengeninklusion $\subset$ oder $\supset$ abschwächt?

b.w.

Aufgabe 4. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$. Negieren Sie dann die Aussagen formal. Übersetzen Sie diese negierten Aussagen zurück in "Umgangssprache". Hier ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für jedes $x_0 \in I$ und jedes $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Bemerkung. Hier handelt es sich um die Definition von **Stetigkeit** bzw. **gleichmäßiger Stetigkeit**, die wir später im Detail kennenlernen werden.

Bemerkung. Auf den meisten Übungsblättern werden Sie Bonus- oder Knobelaufgaben finden. Für die Bonusaufgaben können Sie Zusatzpunkte bekommen. Die Knobelaufgaben werden nicht bepunktet, zählen aber im Falle sinnvoller Bearbeitung als "sinnvoll bearbeitet" in Ihrer Gesamtbewertung mit.

Knobelaufgabe. (a) Auf wie viele Nullen endet die Zahl

$$1000! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000\,?$$

($n!$ liest man "n Fakultät".)

(b) Wie viele natürliche Zahlen $n \leq 1000$ gibt es, die weder durch 5 noch durch 7 teilbar sind?

Abgabe: Montag 17.10.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.