WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach n, daß für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge (d.h. einer Menge mit n Elementen) ist gleich $\binom{n}{k}$. Können Sie auch einen direkten Beweis geben, der ohne vollständige Induktion auskommt?

Hinweis für den Induktionsbeweis: Als n-elementige Menge können Sie die Menge $\{1, \ldots, n\}$ nehmen. Überlegen Sie sich, wie viele k-elementige Teilmengen es gibt, die das Element 1 enthalten, und wie viele es gibt, die das Element 1 nicht enthalten.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Beachten Sie dazu auch die Bonusaufgabe unten.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion den Binomischen Lehrsatz, d.h. folgende Aussage: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(b) Folgern Sie daraus, daß

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Alternativ kann auch dies mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

Aufgabe 4. Wir wollen beweisen, daß alle natürlichen Zahlen gleich sind, z.B. $3 = 7$. Definiere dazu für $a, b \in \mathbb{N}$ das Maximum $\max(a, b)$ als die größere der beiden Zahlen a, b. Für $a = b$ ist $\max(a, b) := a = b$. Sei $\mathcal{A}_n$ die Aussage: "Falls $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n$, dann $a = b$."

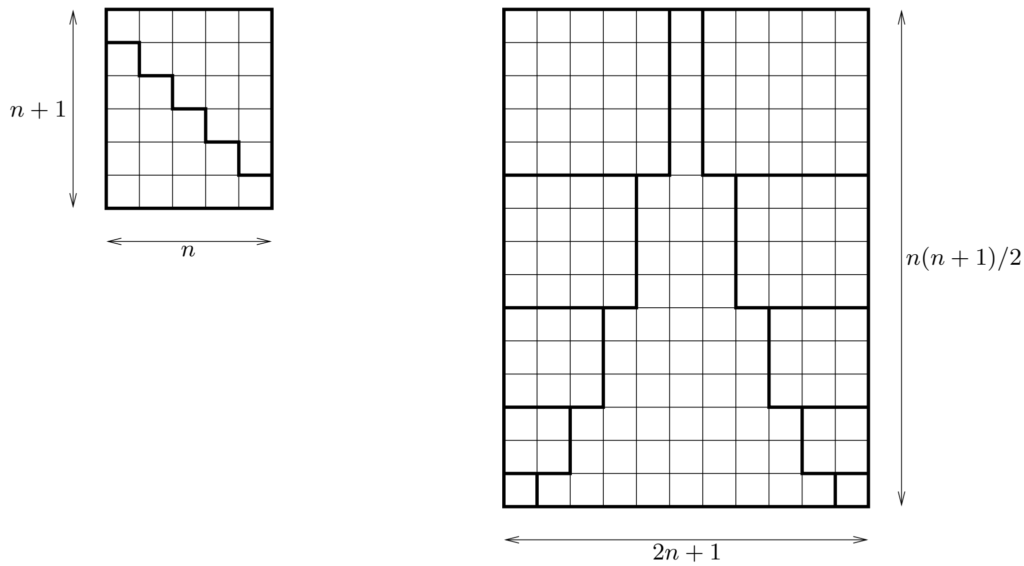
(i) **Induktionsanfang:** $\mathcal{A}_1$ ist wahr, denn aus $\max(a, b) = 1$ folgt $a = b = 1$.

(ii) **Induktionsschluß:** Angenommen, $\mathcal{A}_n$ ist wahr für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n + 1$. Setze $\alpha = a - 1$, $\beta = b - 1$. Dann gilt $\max(\alpha, \beta) = n$, also $\alpha = \beta$, da $\mathcal{A}_n$ gilt. Damit folgt $a = b$, demnach gilt $\mathcal{A}_{n+1}$.

Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig, $r := \max(a, b)$. Da $\mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt insbesondere $\mathcal{A}_r$, also $a = b$. Wo liegt der Trugschluß?

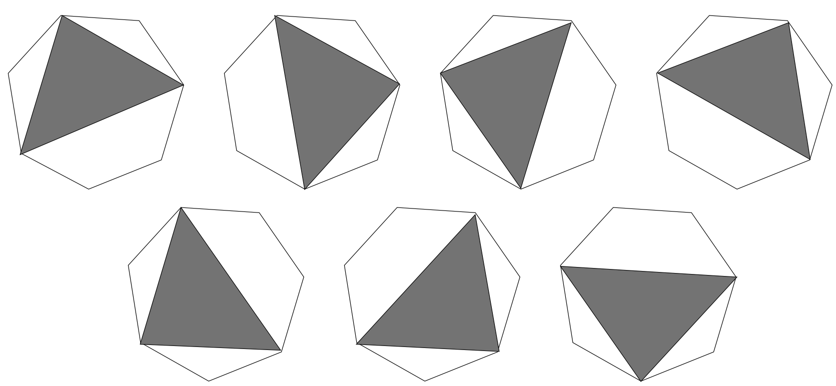
b.w.

Bonusaufgabe. Die Induktionsbeweise in Aufgabe 2 haben offensichtlich den Nachteil, daß man die Summenformel schon kennen muß, um sie zu beweisen. Leiten Sie die Formeln in Aufgabe 2 mittels der folgenden Bilder her.



Vergleichen Sie zu diesen 'Backblechbeweisen' den insbesondere für Lehramtsstudenten interessanten Artikel von T. Bauer und U. Partheil, Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik, *Mathematische Semesterberichte* **56** (2009), 85–103. Diese Zeitschrift finden Sie in der Bibliothek des Mathematischen Instituts.

Knobelaufgabe. Gegeben sei ein reguläres Polygon mit n Seiten. Wie viele Dreiecke gibt es, deren Ecken auch Ecken des Polygons sind, aber deren Seiten keine Seiten des Polygons sind? Für $n = 7$ gibt es zum Beispiel sieben solche Dreiecke.



Abgabe: Montag 24.10.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.