

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Begründen Sie, warum die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^{r/s}$$

für $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung

(i) mittels der Darstellung $f(x) = (x^{1/s})^r$,

(ii) aus der Identität $(f(x))^s = x^r$.

Aufgabe 2. Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

Aufgabe 3.

(a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

$$(i) \quad \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

$$(iii) \quad \begin{array}{ccc} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x := \sin x / \cos x \end{array}$$

Was ist das Bild dieser Funktionen?

(b) Begründen Sie, warum auf dieser Bildmenge die Umkehrfunktionen

$$\arcsin := \sin^{-1}, \quad \arccos := \cos^{-1}, \quad \arctan := \tan^{-1}$$

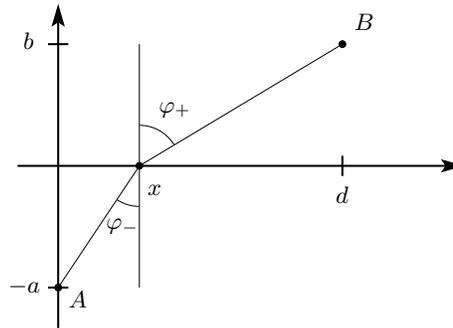
existieren. Hier steht **arc** für **arcus**, d.h. Bogen. So ist z.B. $\arcsin y$ der Winkel x (in Radian) mit $\sin x = y$, wobei das Radianmaß eines Winkels per Definition gleich der entsprechenden Bogenlänge auf dem Einheitskreis ist.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Tangensfunktion.

(d) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen \arcsin , \arccos und \arctan .

b.w.

Aufgabe 4. Gegeben seien die Punkte $A = (0, -a)$ und $B = (d, b)$ in der Ebene mit $a, b, d > 0$. In der unteren Halbebene $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ bewege man sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_- , in der oberen Halbebene $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_+ . Ziel dieser Aufgabe ist es, den schnellsten Weg von A nach B zu finden.



Sie dürfen verwenden, daß schnellste Wege in H_+ bzw. H_- Geraden sind. Argumentieren Sie dann weiter wie folgt:

- (i) Berechnen Sie die Zeit $t(x)$, um via $(x, 0)$ von A nach B zu gelangen.
- (ii) Berechnen Sie $t'(x)$ und zeigen Sie damit, daß für den schnellsten Weg gilt:

$$\frac{\sin \varphi_+}{\sin \varphi_-} = \frac{v_+}{v_-}. \quad (\star)$$

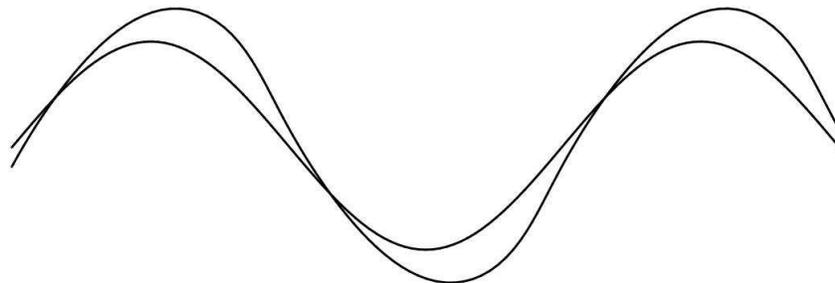
Das *Fermatsche Prinzip* (Pierre de Fermat, ca. 1607–1665) besagt, daß sich Licht stets den schnellsten Weg sucht. Dies ist eine der Inkarnationen des allgemeineren *Prinzips der kleinsten Wirkung* von Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759). Diese Aufgabe zeigt, daß aus dem *Fermatschen Prinzip* das *Snelliussche Brechungsgesetz* (\star) folgt (Willebrord van Roijen Snell, 1580–1626). Siehe dazu auch meine Kölner Antrittsvorlesung unter <http://www.mi.uni-koeln.de/~geiges/naw05.pdf>.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x + x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nur im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist, und auch nur in diesem Punkt stetig. Bestimmen Sie die Ableitung in diesem Punkt mittels der Darstellung von f in der Form $f(x) = f(0) + (x - 0)\Delta(x)$.

Knobelaufgabe. Das folgende Bild zeigt die Reifenspuren eines Fahrrades. In welche Richtung ist das Fahrrad gefahren? Welche der beiden Spuren stammt vom Hinterrad?



Abgabe: Montag 28.11.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.