WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die Matrizen A_ϕ, B_ϕ, C_ϕ der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich, die jeweils eine Drehung um die x-, y- bzw. z-Achse um den Winkel ϕ im entgegengesetzten Uhrzeigersinn beschreiben. Dabei gelte die Rechte-Hand-Regel für die Reihenfolge x, y, z der Achsen. Beispielsweise sendet $A_{\pi/2}$ die positive y-Achse auf die positive z-Achse.

(b) Zeigen Sie $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha = A_{\alpha+\beta}$ durch direktes Nachrechnen.

(c) Berechnen Sie die Matrizen $A_{\pi/2}B_{\pi/2}$, $B_{\pi/2}A_{\pi/2}$ und $C_{\pi/2}B_{\pi/2}A_{\pi/2}$.

Aufgabe 2.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren im Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear abhängig oder unabhängig sind:

   (i) $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto e^{2x}$,

   (ii) $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \sin(x + \pi/3)$.

(b) Seien v_1, v_2, w Elemente eines Vektorraumes V.

   (i) Zeigen Sie: Falls v_1, v_2 linear unabhängig sind und w nicht in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt, dann sind auch $v_1 + w$ und $v_2 + w$ linear unabhängig.

   (ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Aussage aus (i) ohne die Voraussetzung $w \notin \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ nicht richtig ist, d.h. es gibt linear unabhängige v_1, v_2 und ein $w \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$, so daß $v_1 + w$ und $v_2 + w$ linear abhängig sind.

   (iii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1 + w$ und $v_2 + w$ nicht die lineare Unabhängigkeit von v_1 und v_2 folgt.

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, der zusammen mit den kanonischen Einheitsvektoren e_1, e_2 eine Basis (e_1, e_2, a) bildet. Es sei $P\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf $U := \mathbb{R}^2 \times 0$ längs der Richtung von a (d.h. $P(x) \in U$ ist das "Schattenbild" von x bei einer Beleuchtung in Richtung von a).

(a) Berechnen Sie die Matrix der Projektion P bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3).

(b) Zeigen Sie, daß $P \circ P = P$.

(c) Bestimmen Sie die Matrix der komplementären Projektion $Q := \mathrm{id} - P$, und zeigen Sie, daß auch $Q \circ Q = Q$ gilt. Was macht diese Projektion geometrisch?

b.w.

Aufgabe 4. Die *Lorentz-Transformation* beschreibt den Koordinatenwechsel zwischen zwei Inertialsystemen mit konstanter Relativgeschwindigkeit. Im Fall einer Bewegung in x_1-Richtung mit Geschwindigkeit v ist diese Transformation beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (x_0 - \beta x_1)\gamma \\ (x_1 - \beta x_0)\gamma \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $x_0 = ct$ die Zeitkoordinate mit $c =$ Lichtgeschwindigkeit, $\beta = v/c \in (-1, 1)$, sowie $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

(a) Bestimmen Sie die 4×4 Matrix $\Lambda(v)$, die diese lineare Abbildung beschreibt.

(b) Zeigen Sie, daß die Hintereinanderausführung $\Lambda(v_2)\Lambda(v_1)$ zweier Lorentz-Transformationen wieder eine Lorentz-Transformation $\Lambda(v_3)$ ist. Berechnen Sie v_3.

(c) Die *Hyperbelfunktionen* sinh und cosh sind definiert auf $\mathbb{C}$ durch $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ und $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. Zeigen Sie, daß es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\cosh \varphi = \gamma$ und $\sinh \varphi = \beta\gamma$ gibt. Stellen Sie $\Lambda(v)$ mittels der Hyperbelfunktionen dar und begründen Sie, warum man φ als *imaginären Drehwinkel* bezeichnet.

Bonusaufgabe. (a) Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ der linearen Abbildungen $V \to W$ ein K-Vektorraum ist. Den Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, K)$ nennt man auch den Raum der *Linearformen* auf V.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Verifizieren Sie, daß auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0([a, b])$ der stetigen Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ durch die folgenden Vorschriften Linearformen φ_x, $x \in [a, b]$, und φ definiert sind:

(i) Für gegebenes $x \in [a, b]$ ist $\varphi_x \colon C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi_x(f) := f(x)$.

(ii) Die Abbildung $\varphi\colon C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,dx$.

(c) Zeigen Sie, daß die Menge der Linearformen

$$\{\varphi_x\colon\ x \in [a, b]\} \cup \{\varphi\} \subset \mathrm{Hom}\big(C^0([a, b]), \mathbb{R}\big)$$

linear unabängig ist (d.h. jede endliche Teilmenge dieser Menge ist linear unabhängig).

Knobelaufgabe. Gegeben seien zwei Geraden p, q in $\mathbb{R}^3$, die sich nicht schneiden, und mit der Eigenschaft, daß p parallel ist zu einer Geraden, die q orthogonal schneidet. Ein Geradensegment PQ der Länge d bewegt sich so, daß P stets auf p und Q auf q liegt. Dann beschreibt der Mittelpunkt von PQ eine Kurve im Raum. Bestimmen Sie diese Kurve.

Abgabe: Montag 9.1.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.