WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

# Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.**

(a) Bestimmen Sie den Durchschnitt $U \cap V$ und die Summe $U + V$ der beiden Unterräume $U = \mathrm{Lin}(u_1, u_2)$ und $V = \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, daß $(u_1' := 2u_1 + 3u_2, u_2' := u_1 + u_2)$ und $(v_1' := 2v_1 + v_2, v_2' := 3v_1 + 2v_2)$ Basen von $U$ bzw. $V$ sind.

(c) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die durch $f(u_1) = v_1 + v_2$ und $f(u_2) = v_1 - v_2$ bestimmt ist. Geben Sie die Matrix dieser linearen Abbildung bezüglich der Basen $(u_1', u_2')$ bzw. $(v_1', v_2')$ an.

**Aufgabe 2.** Sei $A$ eine reelle $m \times n$ Matrix.

(a) Addieren Sie, für vorgegebene $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, zur $i$-ten Spalte das $\lambda$-fache der $j$-ten. Zeigen Sie, daß die so abgeänderte Matrix, aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, das gleiche Bild wie $A$ hat.

(b) Addieren Sie, für vorgegebene $i \neq j \in \{1, \ldots, m\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, zur $i$-ten Zeile das $\lambda$-fache der $j$-ten. Zeigen Sie, daß die so abgeänderte Matrix, aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, den gleichen Kern wie $A$ hat.

**Aufgabe 3.**

(a) Geben Sie für folgende lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ an, bestimmen Sie $f \circ f$ und, falls die Umkehrabbildung existiert, $f^{-1}$.

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -6x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie jeweils die reelle $2 \times 2$ Matrix an, die die folgende lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreibt:

(i) Spiegelung am Ursprung $(0, 0)$,
(ii) Spiegelung an der $x_1$-Achse,
(iii) Spiegelung an der Hauptdiagonalen $\{x_1 = x_2\}$.

b.w.

**Aufgabe 4.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Auf dem Vektorraum $V := C^0([a,b])$ betrachte man die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & V & \longrightarrow & V \\ & f & \longmapsto & F \end{array} \qquad \text{mit } \; F(x) := \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b].$$

Man zeige: $\Phi$ ist linear, injektiv, aber nicht surjektiv. Daraus folgere man, daß $V$ unendlich-dimensional ist.

**Bonusaufgabe.** (a) Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, daß $V = \operatorname{Kern}(f) \oplus \operatorname{Bild}(f)$.

(b) Es seien $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen $K$-Vektorräumen. Zeigen Sie, daß

$$\operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang}(g) \le \operatorname{Rang}(g \circ f) + \dim V_2.$$

**Knobelaufgabe.**

(a) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Hinweis: Seien $p_1, \ldots, p_n$ die ersten $n$ Primzahlen. Was können Sie dann über die Primfaktoren von

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

aussagen?

(b) $\mathbb{R}$ ist ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
Hinweis: Betrachte Ausdrücke der Form $\lambda_1 \log p_1 + \cdots + \lambda_n \log p_n$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ und $p_i \in \mathbb{N}$ Primzahl.

(c) Eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorrraum, d.h. eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{für alle } \; x, y \in \mathbb{R} \; \text{ und } \; \lambda, \mu \in \mathbb{Q}.$$

Beschreiben Sie explizit eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Abgabe: Montag 16.1.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.