WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Lösung des Zentralkraftproblems $\ddot{\mathbf{r}} = -f(\mathbf{r})\mathbf{r}/r$. Zeigen Sie:

(a) Dann sind auch $t \mapsto \mathbf{r}(t+c)$ für $c \in \mathbb{R}$ und $t \mapsto \mathbf{r}(-t)$ Lösungen (Invarianz unter Zeittranslation bzw. Reversibilität der Zeit).

(b) Im zentralsymmetrischen Fall (d.h. falls f nur eine Funktion von $r := |\mathbf{r}|$ ist) gilt überdies: Ist $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie mit $A(0) = 0$ (d.h. wir können A als Element der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(3)$ auffassen), so ist auch $t \mapsto A\mathbf{r}(t)$ eine Lösung (Invarianz unter Isometrien).

Aufgabe 2. Gegeben sei eine C^k-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $k \geq 1$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall bezeichnet. Wir schreiben

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = r(t)\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big)$$

mit $r(t) > 0$. Für jedes feste $t \in I$ kann ein $\theta(t)$ gewählt werden, eindeutig bis auf Addition ganzzahliger Vielfacher von 2π. Ziel dieser Aufgabe ist es, nur mit den Methoden aus der Anfängervorlesung zu zeigen, daß θ als C^k-Funktion (eindeutig bis auf Addition eines Vielfachen von 2π) gewählt werden kann.

Zunächst beobachten wir, daß r durch $r(t) = |\alpha(t)|$ festgelegt ist und wegen $\alpha \neq 0$ von der Klasse C^k ist. Daher können wir im weiteren o.E. $r \equiv 1$ annehmen (indem wir zur Kurve α/r übergehen).

(a) (Eindeutigkeit) Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ geschrieben als $\alpha(t) = \big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big)$ mit einer C^k-Funktion θ. Sei $t_0 \in I$ und $\theta_0 := \theta(t_0)$. Zeigen Sie, daß

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \big(\alpha_1(s)\dot{\alpha}_2(s) - \dot{\alpha}_1(s)\alpha_2(s)\big)\, ds.$$

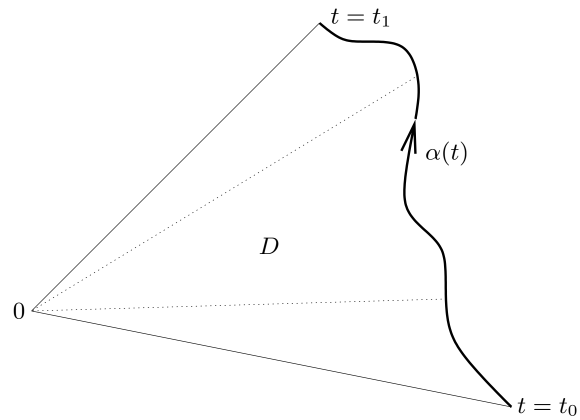
(b) (Existenz) Gegeben sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Definiere θ mittels der Gleichung aus (a), wobei θ_0 so gewählt sei, daß $\alpha(t_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$. Setze $(\beta_1, \beta_2) := (\cos\theta, \sin\theta)$. Zeigen Sie, daß (α_1, α_2) und (β_1, β_2) Lösungen ein und desselben linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung sind (mit gleichen Anfangswerten). Folgern Sie mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, daß $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)$.

b.w.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe wollen wir einen alternativen Beweis für die Flächeninhaltsformel von ebenen Mengen der Form

$$D = \{s\alpha(t)\colon\ t \in [t_0, t_1],\ s \in [0,1]\}$$

geben, wobei $\alpha = r(\cos\theta, \sin\theta)\colon\ [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^1-Kurve ist mit $\dot\theta > 0$ auf $[t_0, t_1]$ und mit $\theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi$.



(a) Zeigen Sie, daß der äußere Normalenvektor $\mathbf{n}(t)$ an D im Punkt $\alpha(t) \in \partial D$ gegeben ist durch

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\dot\alpha_2(t), -\dot\alpha_1(t))}{|\dot\alpha(t)|}.$$

(b) Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{v}\ dx\, dy = \int_{\partial D} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle\ ds$$

auf das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y) = (x, y)$ an, um damit die Flächeninhaltsformel

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2(t)\dot\theta(t)\, dt$$

herzuleiten. (Daß der Rand ∂D nur stückweise glatt ist, spielt bei der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes keine Rolle.) Welchen Beitrag liefern die beiden geraden Randsegmente von D im Gaußschen Integralsatz?

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll ein Spezialfall des dritten Keplerschen Gesetzes hergeleitet werden. Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$$

genau dann Lösung des Zentralkraftproblems $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}/r^3$ (entsprechend dem Gravitationsgesetz $F \sim 1/r^2$) ist, wenn $|\omega| = 1/a^{3/2}$. Welche Beziehung besteht zwischen der Periode T (d.h. der Zeit für einen vollen Umlauf) und dem Radius a?

Abgabe: Montag 15.10.12,
bis spätestens 12:00 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.