WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (a) Sei $G \neq \{0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Setze $\alpha := \inf(G \cap \mathbb{R}^+)$, wobei $\mathbb{R}^+$ die positiven reellen Zahlen bezeichne. Zeigen Sie:

(i) Falls $\alpha = 0$, so ist G dicht in $\mathbb{R}$.

(ii) Falls $\alpha > 0$, so gilt $G = \alpha\mathbb{Z}$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Eine Zahl $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt *Periode* von f, falls $f(t+p) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Setze

$$\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{R}\colon\ p \text{ ist Periode von } f\} \cup \{0\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{P}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

(ii) Falls f stetig und nicht konstant ist, so gilt $\mathcal{P} = \alpha\mathbb{Z}$ für ein $\alpha > 0$.

(c) Sei $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$, d.h. $\chi(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $\chi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}$ für diese Funktion.

Aufgabe 2. (a) Es seien $a, \mu > 0$, $0 \leq e < 1$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der C^∞-Diffeomorphismus, der als Lösung der Keplergleichung

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{p}\,(t - t_0)$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

(i) $\dot{u} = \dfrac{2\pi}{p(1 - e\cos u)}$

(ii) $\ddot{u} = -\dfrac{4\pi^2}{p^2} \cdot \dfrac{e \sin u}{(1 - e\cos u)^3}$

(b) Wir setzen

$$\mathbf{r}(t) := a\big(\cos u(t) - e, \sqrt{1 - e^2}\, \sin u(t)\big).$$

Zeigen Sie, daß $r = a(1 - e\cos u)$, und verifizieren Sie, daß $\mathbf{r}$ eine Lösung des Keplerproblems

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ist.

b.w.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Hauptast $\mathcal{H}$ einer Hyperbel in der xy-Ebene, wobei wir die kartesischen Koordinaten so wählen, daß der entsprechende Brennpunkt im Ursprung liegt, und die Exzentrizitätsachse $\mathbf{e}$ in negative x-Richtung weist. Die reelle Halbachse der Hyperbel sei a. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}$ wird beschrieben durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2} - ex = a(e^2-1).$$

(b) Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$(x+ea)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = a^2, \quad x+ea \geq a.$$

(c) Durch

$$u \mapsto a\big(\cosh u - e, -\sqrt{e^2-1}\sinh u\big), \quad u \in \mathbb{R},$$

wird eine bijektive Parametrisierung von $\mathcal{H}$ gegeben.

Aufgabe 4. Sei $\mathbf{r}\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Lösung des Keplerproblems mit $c \neq 0$, $h > 0$ (hyperbolischer Fall), reeller Halbachse a, Exzentrizitätsachse $\mathbf{e}$ in negativer x-Richtung, und Perizentrumspassage für $t = t_0$. Setze $p = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{\mu}$ wie im elliptischen Fall (wenngleich dies hier keine Periode bezeichnet).

Nach Aufgabe 3 können wir $\mathbf{r}$ schreiben als

$$\mathbf{r}(t) = a\big(\cosh u(t) - e, -\sqrt{e^2-1}\sinh u(t)\big).$$

(a) Berechnen Sie r.

(b) Zeigen Sie, daß u die *Keplergleichung*

$$e\sinh u - u = \frac{2\pi}{p}(t-t_0)$$

löst. Überlegen Sie sich, daß diese Lösung wie im elliptischen Fall eindeutig ist.

Wenn Sie dann noch positive Energie haben, können Sie zusätzlich wie in Aufgabe 2 verifizieren, daß umgekehrt die Lösung der Keplergleichung eine Lösung des Keplerproblems liefert.

Abgabe: Montag 29.10.12,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.