WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offener Kegel und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, für die gilt:

$$f(\lambda x) = \log \lambda + f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Zeigen Sie, daß

$$\langle \operatorname{grad} f(x), x \rangle = 1 \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

(b) Zeigen Sie, daß das n-Körperproblem für das Kraftgesetz $F \sim 1/r$ keine Gleichgewichtslösungen besitzt.

Aufgabe 2. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, falls gilt:

$$\forall x, y \in A \; \forall s \in [0,1]\colon \; sx + (1-s)y \in A.$$

(a) Sei $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige Familie konvexer Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, daß dann auch $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ konvex ist.

(b) Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige Teilmenge. Die *konvexe Hülle* von S ist definiert durch

$$\mathrm{Co}(S) = \bigcap_{\substack{A \supset S \\ A \text{ konvex}}} A.$$

Zeigen Sie, daß $\mathrm{Co}(S)$ die kleinste konvexe Menge ist, die S enthält.

(c) Gegeben seien Punkte $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, daß sich die konvexe Hülle dieser Punkte darstellen läßt als

$$\mathrm{Co}\big(\{p_1, \ldots, p_n\}\big) = \Big\{\sum_{i=1}^n s_i p_i \colon \; s_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^n s_i = 1\Big\}.$$

Aufgabe 3. Sei $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)\colon (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}^{3\cdot 3} \setminus \Delta$ eine Lösung des Dreikörperproblems. Es wird nicht angenommen, daß der Schwerpunkt fest bleibt. Zeigen Sie, daß es nicht sein kann, daß $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ für $t \to \infty$ beide gegen den selben Punkt im $\mathbb{R}^3$ konvergieren.

Hinweis: Argumentieren Sie durch Widerspruch. Studieren Sie dazu unter der Annahme

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{r}_1(t) = p = \lim_{t\to\infty} \mathbf{r}_2(t)$$

das Verhalten des Trägheitsmomentes $I(t)$ und von $\mathbf{r}_3(t)$ für $t \to \infty$.

b.w.

Aufgabe 4. Im Dreikörperproblem mit Schwerpunkt fixiert im Ursprung betrachten wir die sogenannten *Jacobi-Koordinaten*

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{R} := Mm^{-1}\mathbf{r}_3,$$

wobei $m := m_1 + m_2$ und $M := m_1 + m_2 + m_3$. Zeigen Sie:

(a) Der Vektor $\mathbf{R}$ beschreibt die Position von m_3 relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt von m_1 und m_2.

(b) $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + m_2 m^{-1}\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - m_1 m^{-1}\mathbf{r}$.

(c) Die Differentialgleichungen für das Dreikörperproblem lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{Gm}{r^3}\mathbf{r} + Gm_3\Big(\frac{\mathbf{R} - m_1 m^{-1}\mathbf{r}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{R} + m_2 m^{-1}\mathbf{r}}{r_{13}^3}\Big), \\ \ddot{\mathbf{R}} &= -\frac{GMm_1 m^{-1}}{r_{13}^3}(\mathbf{R} + m_2 m^{-1}\mathbf{r}) - \frac{GMm_2 m^{-1}}{r_{23}^3}(\mathbf{R} - m_1 m^{-1}\mathbf{r}), \end{aligned}$$

wobei $r_{ij} := |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. (Aufgrund der Annahme an den Schwerpunkt des Gesamtsystems reduziert sich das Dreikörperproblem auf ein Problem der Ordnung 12.)

(d) Setze $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{V} := \dot{\mathbf{R}}$, $a := m_1 m_2/m$ und $A := m_3 m/M$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= a(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + A(\mathbf{R} \times \mathbf{V}), \\ 2I &= ar^2 + AR^2, \\ 2T &= av^2 + AV^2. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Drehimpuls, Trägheitsmoment und kinetische Energie sehen so aus wie in einem Zweikörpersystem mit Massen a, A, Positionsvektoren $\mathbf{r}, \mathbf{R}$, und Geschwindigkeiten $\mathbf{v}, \mathbf{V}$.

Auf dem nächsten Übungsblatt werden wir eine geometrische Anwendung dieser Koordinaten diskutieren.

Abgabe: Montag 12.11.12,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.