

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Potentialfunktion

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|z_1-z|} + \frac{\mu}{|z_2-z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z_1, z_2\},$$

aus dem planaren zirkularen eingeschränkten Dreikörperproblem mit $\rho_i := |z - z_i|$, $i = 1, 2$, geschrieben werden kann als

$$\Phi(z) = (1-\mu)\left(\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{1}{\rho_1}\right) + \mu\left(\frac{\rho_2^2}{2} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Dies erklärt, warum die Wahl der additiven Konstanten $\mu(1-\mu)/2$ in der ursprünglichen Definition von Φ günstig ist.

(b) Zeigen Sie mittels der Darstellung von Φ aus (a), daß die Funktion Φ ihr absolutes Minimum in den Lagrangepunkten L_4, L_5 annimmt.

(c) Für welche Werte der Jacobi-Konstanten $C = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2$ können Bahnen $t \mapsto z(t)$ zwischen den beiden primären Körpern existieren? Beachten Sie dazu, daß solche Bahnen innerhalb des entsprechenden Hillschen Gebietes verlaufen müssen.

Aufgabe 2. (a) Beschreiben Sie die Eulerschen kollinearen Lösungen des Dreikörperproblems explizit für den Fall $m_1 = m_2 = m_3$.

(b) Die Lagrange-Librationspunkte L_4, L_5 entsprechen offensichtlich den Dreieckslösungen von Lagrange. Es liegt nahe, daß die Eulerschen Librationspunkte den Eulerschen kollinearen Lösungen entsprechen sollten. Bei der Herleitung der Eulerschen Lösungen konnte die Reihenfolge der drei Körper auf der Geraden beliebig vorgegeben werden, daher gibt es bei gegebenen Körpern der Massen m_1, m_2 drei mögliche Positionen für den dritten Körper der Masse m_3 . Der Einfachheit halber wollen wir uns auf den Fall beschränken, der der Notation bei der Herleitung der Eulerschen Lösungen entspricht, wo also m_2 zwischen m_1 und m_3 liegt.

Zeigen Sie, daß die entsprechende Eulersche Lösung mit $m_3 = 0$ tatsächlich der Situation entspricht, daß der dritte (masselose) Körper im Librationspunkt L_2 der Massen m_1, m_2 liegt.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die Koordinaten der fünf Librationspunkte im planaren zirkularen eingeschränkten Dreikörperproblem für den Fall, daß die primären Körper die gleiche Masse haben, d.h. $\mu = 1/2$.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Lagrange-Librationspunkte L_4, L_5 im allgemeinen Fall.

b.w.

Aufgabe 4. Wir hatten gesehen, daß wir jede Lösung des Keplerproblems mit $h < 0$ (d.h. $e < 1$) und $c \neq 0$ mittels der exzentrischen Anomalie u wie folgt parametrisieren können:

$$r(u) = a(1 - e \cos u), \quad \sqrt{\mu/a} \cdot t(u) = a(u - e \sin u),$$

sofern $t_0 = 0$ der Zeitpunkt einer Perizentrumspassage ist. Die Beziehung zwischen a und h ist gegeben durch $h = -\mu/2a$. Dies entspricht den Gleichungen

$$x(u) = a(\cos u - e), \quad y(u) = \sqrt{1 - e^2} \sin u.$$

Im Grenzwert $e \rightarrow 1$ ergibt sich die Kurve

$$r(u) = a(1 - \cos u), \quad \sqrt{\mu/a} \cdot t(u) = a(u - \sin u).$$

Dies ist die sogenannte *Zykloide*, d.h. die Kurve in der $(\sqrt{\mu/a} \cdot t, r)$ -Ebene, die ein Punkt auf dem Rand eines Kreises vom Radius a beschreibt, den man auf der t -Achse abrollt. Skizzieren Sie diese Kurve.

Wir wollen zeigen, daß dieser Grenzfall genau der Bewegung im Fall $c = 0$ entspricht. Gegeben sei also eine Lösung des Keplerproblems mit $h < 0$ und $c = 0$, d.h. die Bewegung findet auf einer Geraden statt. Es sei $2a$ der maximale Abstand vom Ursprung, d.h. dort soll die Geschwindigkeit 0 sein. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt wieder $h = -\mu/2a$, und wir können die Bahn parametrisieren durch

$$r(u) = a(1 - \cos u), \quad u \in (0, 2\pi).$$

Schreibe $r' := dr/du$. Zeigen Sie:

- (a) $(r')^2 = 2ar - r^2$,
- (b) $r\dot{r} = \sqrt{\mu/a} \cdot r'$,
- (c) $\dot{u} = \sqrt{\mu/a} \cdot (1/r)$,
- (d) $\sqrt{\mu/a} \cdot t = a(u - \sin u)$, wobei $t = 0$ der Emissionszeitpunkt des Teilchens aus dem Zentralkörper ist.

Beachten Sie, daß Aussage (c) genau der Formel für die exzentrische Anomalie aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 4 entspricht (mit $t_0 = 0$ der Emissionszeitpunkt).

Bemerkung: Nach Satz 2.5 der Vorlesung gilt $\mu^2(e^2 - 1) = 2hc^2$ für jede Lösung des Keplerproblems. Der Grenzfall $e \rightarrow 1$ (bei gegebener Energie $h \neq 0$) entspricht daher tatsächlich dem Grenzfall $c \rightarrow 0$. Die obigen Überlegungen zeigen, daß man eine stetige Familie von Lösungskurven in Abhängigkeit von c bekommt, wenn man für $c = 0$ die Lösungskurven wie oben betrachtet, aber alle $u \in \mathbb{R}$ zuläßt. Dies bedeutet, daß das Teilchen am Zentralkörper bei einer Kollision reflektiert wird.