WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Die Abbildung

$$\varphi\colon\ (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \longmapsto (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

sei beschrieben durch

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos Q_2, \\ q_2 &= Q_1 \sin Q_2, \\ p_1 &= P_1 \cos Q_2 - \frac{P_2}{Q_1} \sin Q_2, \\ p_2 &= P_1 \sin Q_2 + \frac{P_2}{Q_1} \cos Q_2. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine möglichst große Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ an, auf der die Abbildung φ einen Diffeomorphismus auf ihr Bild liefert.

(b) Zeigen Sie, daß φ eine kanonische Transformation ist. Dazu ist es sinnvoll, die Jacobische Matrix von φ in Blockform wie in Aufgabe 3 unten darzustellen.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß jede symplektische $(2n \times 2n)$-Matrix Φ invertierbar ist, indem Sie explizit die inverse Matrix mittels Φ, Φ^t und J ausdrücken.

(b) Zeigen Sie, daß die symplektischen $(2n \times 2n)$-Matrizen eine Gruppe unter Matrixmultiplikation bilden, die sogenannte *symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(2n)$.

Aufgabe 3. Wir schreiben eine $(2n \times 2n)$-Matrix Φ in Blockform

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei A, B, C, D reelle $(n \times n)$-Matrizen sind.

(a) Zeigen Sie, daß Φ symplektisch ist genau dann, wenn gilt:

$$A^tC = C^tA,\ \ B^tD = D^tB,\ \ A^tD - C^tB = E_n.$$

Stellen Sie Φ^{-1} in Blockform dar, und folgern Sie, daß man die Bedingungen an A, B, C, D äquivalent auch formulieren kann als

$$AB^t = BA^t,\ \ CD^t = DC^t,\ \ AD^t - BC^t = E_n.$$

b.w.

(b) Einer unitären Matrix $Z \in \mathrm{U}(n)$, d.h. einer komplexen $(n \times n)$-Matrix mit $Z\overline{Z}^t = E_n$, kann man die reelle Matrix

$$\Phi = \Phi(Z) = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

zuordnen, indem man $Z = X + \mathrm{i}Y$ mit reellen $(n \times n)$-Matrizen X, Y schreibt. Zeigen Sie, daß $\Phi(Z)$ invertierbar ist, und daß die Abbildung $Z \mapsto \Phi(Z)$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{U}(n)$ in die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(2n)$ der invertierbaren reellen $(2n \times 2n)$-Matrizen liefert. Auf diese Weise kann man $\mathrm{U}(n)$ als Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n)$ auffassen.

(c) Zeigen Sie mittels (a) und (b), daß

$$\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n).$$

Hier bezeichnet $\mathrm{O}(2n)$ die Gruppe der orthogonalen $(2n \times 2n)$-Matrizen, und $\mathrm{U}(n)$ wird als Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n)$ verstanden.

Aufgabe 4. In der Vorlesung haben wir gesehen, daß sich das planare zirkulare eingeschränkte Dreikörperproblem durch die Hamilton-Funktion

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - q_1)^2 - \Phi(q_1, q_2)$$

beschreiben läßt.

(a) Zeigen Sie, durch Verwendung der Definition von Φ, daß wir dies auch schreiben können als

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (q_1 p_2 - q_2 p_1) - U(q_1, q_2) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu),$$

wobei

$$U(q_1, q_2) = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2};$$

hier bezeichnet ρ_i den Abstand des masselosen Körpers im Punkt (q_1, q_2) vom Primärkörper m_i, $i = 1, 2$.

(b) Zeigen Sie, daß die neue Hamilton-Funktion in den Variablen Q_1, Q_2, P_1, P_2 nach der Transformation aus Aufgabe 1 gegeben ist durch

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2}\big(P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2}\big) - P_2 - U(Q_1 \cos Q_2, Q_1 \sin Q_2) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu),$$

und verifizieren Sie, daß die Hamilton-Gleichungen wie erwartet transformieren.

(c) Bei der Beschreibung in (a) arbeiten wir in rotierenden Koordinaten $z = (x, y) = (q_1, q_2)$. Diese stehen zu den nichtrotierenden Koordinaten (ξ, η) in Beziehung durch

$$\xi(t) + \mathrm{i}\eta(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(x(t) + \mathrm{i}y(t)).$$

Verfolgen Sie die Koordinatentransformationen zurück zu diesen ursprünglichen Koordinaten, und zeigen Sie damit, daß gilt:

$$P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2} = v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2, \quad P_2 = c = \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}.$$

Was ist die Bedeutung von Q_1, Q_2 und P_1?

Abgabe: Montag 14.1.13,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.