WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Die Lorentz-Gruppe $\mathrm{O}(3,1)$, die in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt, ist die Gruppe der reellen (4×4)–Matrizen A, die der Gleichung $A^tDA = D$ genügen, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1,1,1,-1)$ ist. Zeigen Sie, daß $\mathrm{O}(3,1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit des Raumes $\mathcal{M}(4\times 4)\cong\mathbb{R}^{16}$ aller reellen (4×4)–Matrizen ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(n)$ der orthogonalen $(n\times n)$-Matrizen ist kompakt.

(b) Die Gruppenoperationen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(n) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n)\\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n)\\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

sind differenzierbar.

Eine Gruppe mit Mannigfaltigkeitsstruktur, bezüglich der die Gruppenoperationen differenzierbar sind, heißt **Liesche Gruppe**.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(n)$ zwei Wegzusammenhangskomponenten hat.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n)$ der $(n\times n)$-Matrizen mit nichtverschwindender Determinante zwei Zusammenhangskomponenten hat, indem Sie Gauß-Elimination in stetige Wege übersetzen. Verwenden Sie dann die Polarzerlegung, d.h. die Darstellbarkeit von $A\in\mathrm{GL}(n)$ als Produkt $A = PR$ mit P positiv definit und symmetrisch, und $R\in\mathrm{O}(n)$.

b.w.

Aufgabe 3. Es bezeichne $\mathcal{M}(n \times n)$ den Vektorrraum der reellen $(n \times n)$-Matrizen. Für $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ definiere

$$\gamma(t) := \exp(tA) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu A^\nu}{\nu!}.$$

Zeigen Sie:

(a) Diese Reihe konvergiert für alle $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ (oder auch alle komplexen $(n \times n)$–Matrizen).

(b) Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{spur}(A))$.

(c) $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$.

(d) Die Abbildung $t \mapsto \gamma(t)$ ist differenzierbar, und es gilt $\gamma'(0) := T_0\gamma(\partial_t) = A$.

(e) Falls A schiefsymmetrisch ist, so liegt $\gamma(t)$ in $\mathrm{SO}(n)$.

(f) Der Tangentialraum $T_I\mathrm{SO}(n) \subset T_I\mathcal{M}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der Untermannigfaltigkeit $\mathrm{SO}(n) \subset \mathcal{M}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet, ist der Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

(g) Was ist $T_B\mathrm{SO}(n)$ für ein beliebiges $B \in \mathrm{SO}(n)$?

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) Falls $f\colon N \to M$ und $g\colon M \to P$ Einbettungen sind, dann auch $g \circ f\colon N \to P$.

(b) Falls $f_i\colon N_i \to M_i$ Einbettungen sind, $i = 1, 2$, dann auch $f_1 \times f_2\colon N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2$, definiert durch $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

(c) $S^n \times \mathbb{R}$ kann in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden.

(d) $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ kann in den $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$ eingebettet werden.

Beschreiben Sie explizit eine Einbettung $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ mittels elementarer Funktionen.

Abgabe: Mittwoch 13.11.13 in der Vorlesung.