WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine kompakte, zusammenhängende n-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis des verallgemeinerten **Jordanschen Kurvensatzes**: $\mathbb{R}^{n+1} \backslash M$ besitzt zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte und eine unbeschränkte.

Zeigen Sie dazu folgendes:

(a) Sei $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M$. Dann existiert zu jedem $x \in M$ und jeder Umgebung U von x in $\mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt $z_1 \in U$, der mit z_0 durch einen Weg verbunden werden kann, der M nicht schneidet.

Hinweis: Zeigen Sie, daß die Menge der Punkte $x \in M$, für die diese Bedingung wahr ist, eine nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge von M ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ höchstens zwei Komponenten besitzt.

(c) Definiere für jedes $z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \sigma_z\colon & M & \longrightarrow & S^n \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-z}{\|x-z\|}. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß für zwei Punkte z_0, z_1, die zur gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ gehören, gilt:

$$\deg_2(\sigma_{z_0}) = \deg_2(\sigma_{z_1}).$$

(d) Sei $z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ und $v \in S^n$, und es bezeichne γ den **Strahl an** z **in Richtung** v:

$$\gamma = \{z + tv\colon\ t \geq 0\}.$$

Zeigen Sie, daß der Strahl γ genau dann transversal zu M ist, wenn v ein regulärer Wert der Abbildung σ_z ist. In diesem Kontext bedeutet 'transversal' einfach: 'in den Schnittpunkten ist γ nicht tangential zu M'.

(e) Sie nun γ ein Strahl an z_0, der M transversal in einer nichtleeren Menge schneidet. Überlegen Sie sich, daß so ein Strahl existiert und die Schnittmenge dann endlich ist. Sei z_1 ein weiterer Punkt auf γ, der nicht auf M liegt, und sei l die Anzahl der Schnittpunkte von γ und M zwischen z_0 und z_1. Zeigen Sie, daß

$$\deg_2(\sigma_{z_0}) = \deg_2(\sigma_{z_1}) + l \mod 2\,.$$

Hinweis: Malen Sie ein Bild.

(f) Charakterisieren Sie die Komponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ mittels $\deg_2(\sigma_z)$.

b.w.

Aufgabe 2. Seien $M, N \subset \mathbb{R}^q$ kompakte, orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand der Dimension m bzw. n. Die Mannigfaltigkeiten sollen disjunkt sein und es gelte $m + n = q - 1$. Die **Verschlingungszahl** $\mathtt{lk}(M, N)$ ist der Abbildungsgrad von

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & S^{q-1} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x-y}{\|x-y\|}. \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathtt{lk}(M, N) = (-1)^{(m-1)(n-1)} \mathtt{lk}(N, M)$.

(b) Falls M in $\mathbb{R}^q \setminus N$ zu einem Punkt deformiert werden kann (d.h. falls die Einbettung $M \to \mathbb{R}^q \setminus N$ homotop ist zu einer konstanten Abbildung), oder falls M eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^q \setminus N$ berandet, so ist $\mathtt{lk}(M, N) = 0$.

(c) Seien $S, \bar{S}$ die Randkomponenten eines in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten k-fach verdrehten Zylinders, d.h. einer Fläche, die man aus einem rechteckigen Streifen durch Verkleben zweier gegenüberliegender Seiten mit k Verdrehungen erhält. Mit geeigneten Orientierungen der Randkomponenten gilt $\mathtt{lk}(S, \bar{S}) = k$.

(d) Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ eingebettete Zylinder mit k_1 bzw. k_2 Verdrehungen. Für $|k_1| \neq |k_2|$ gibt es keinen Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^3$, der den Zylinder C_1 in C_2 überführt.

Aufgabe 3. Sei $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ die Einheitssphäre. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f\colon & S^3 & \longrightarrow & S^2 = \mathbb{CP}^1 \\ & (z, w) & \longmapsto & [z : w] \end{array}$$

definiert die sogenannte **Hopf-Faserung** durch Kreise $S^1 \cong f^{-1}([z : w])$. Visualisieren Sie diese S^1-Fasern im $\mathbb{R}^3$ unter der stereographischen Projektion $S^3 \setminus \{*\} \to \mathbb{R}^3$.

Die Hopf-Faserung ist ein Beispiel eines S^1-Prinzipalbündels. Solche Bündel werden wir noch allgemein behandeln. Im wesentlichen heißt dies, daß jeder Punkt in S^2 eine Umgebung U besitzt, so daß $f^{-1}(U)$ diffeomorph zu $U \times S^1$ ist, und daß die Fasern die Bahnen einer S^1-Wirkung sind. Speziell tritt die Hopf-Faserung auf bei der Beschreibung des Dirac-Monopols in der Elektrodynamik.

Aufgabe 4. Die **Hopf-Invariante** $H(f)$ einer stetigen Abbildung $f\colon S^3 \to S^2$ ist als die Verschlingungszahl $\mathtt{lk}(g^{-1}(a), g^{-1}(b))$ definiert. Hier ist g eine differenzierbare Abbildung in der Homotopieklasse von f, und a, b sind verschiedene reguläre Werte von g. Die Verschlingungszahl wird in $\mathbb{R}^3 \cong S^3 \setminus \{x\}$ berechnet für einen Punkt $x \in S^3$ mit $f(x) \neq a, b$. Zeigen Sie:

(a) $H(f)$ ist eine wohldefinierte Homotopieinvariante von f und verschwindet genau für nullhomotope Abbildungen (d.h. Abbildungen, die homotop zu einer konstanten Abbildung sind).

(b) Hat eine Abbildung $g\colon S^3 \to S^3$ den Grad p, so gilt $H(f \circ g) = pH(f)$.

(c) Hat eine Abbildung $h\colon S^2 \to S^2$ den Grad q, so gilt $H(h \circ f) = q^2 H(f)$.

(d) Die in Aufgabe 3 definierte Abbildung hat Hopf-Invariante 1.

Abgabe: Mittwoch 8.1.14 in der Vorlesung.