WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 1

Wichtiger Hinweis: Einige der Begriffe und Notationen auf diesem Übungsblatt werden erst in der Vorlesung am Montag erklärt.

Aufgabe 1. Es seien M, N, M', N' Mengen. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Menge

$$(M \times N) \setminus (M' \times N')$$

im allgemeinen verschieden ist von der Menge

$$(M \setminus M') \times (N \setminus N').$$

Zeigen Sie, andererseits, daß $(M \times N) \setminus (M' \times N')$ stets als Vereinigung zweier Mengen der Form $A \times B$ geschrieben werden kann.

Hier bezeichnet $M \times N$ das **kartesische Produkt** der Mengen M und N, d.h.

$$M \times N = \big\{(x, y)\colon\ x \in M,\ y \in N\big\}.$$

Hinweis: Zeichnen Sie eine Skizze (z.B. mit Teilmengen von $\mathbb{R}$), die die Fragestellungen veranschaulicht.

Aufgabe 2. Gegeben seien Mengen A, B, C und Abbildungen $f\colon\ A \to B$ und $g\colon\ B \to C$. Die Abbildung f heißt **injektiv**, falls für alle $x, x' \in A$ gilt: wenn $x \neq x'$, dann auch $f(x) \neq f(x')$. Die Abbildung f heißt **surjektiv**, falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$. Analog gelten die Definitionen für g.

Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so auch die Komposition $g \circ f\colon\ A \to C$.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Bedingung “f ist surjektiv” in (c) nicht weggelassen werden kann.

b.w.

Aufgabe 3. Es seien M, N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Weiter seien A und B Teilmengen von M, sowie C und D Teilmengen von N. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Hier bezeichnet z.B. $f^{-1}(C)$ das Urbild von C unter der Abbildung f, also

$$f^{-1}(C) = \big\{x \in M\colon\ f(x) \in C\big\}.$$

Kann man die falsche(n) Aussage(n) zu (einer) richtigen Aussage(n) machen, indem man die Mengengleichheit zu einer Mengeninklusion $\subset$ oder $\supset$ abschwächt?

Aufgabe 4. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$. Negieren Sie dann die Aussagen formal. Übersetzen Sie diese negierten Aussagen zurück in "Umgangssprache". Hier ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für jedes $x_0 \in I$ und jedes $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Bemerkung. Hier handelt es sich um die Definition von **Stetigkeit** bzw. **gleichmäßiger Stetigkeit**, die wir später im Detail kennenlernen werden.

Auf den meisten Übungsblättern werden Sie Bonus- oder Knobelaufgaben finden. Mit diesen Aufgaben können Sie zusätzliche Punkte sammeln.

Knobelaufgabe. Hier ist eine Liste mit fünf Aussagen, die sich aufeinander beziehen. Welche dieser Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(i) Genau eine Aussage auf dieser Liste ist falsch.

(ii) Genau zwei Aussagen auf dieser Liste sind falsch.

(iii) Genau drei Aussagen auf dieser Liste sind falsch.

(iv) Genau vier Aussagen auf dieser Liste sind falsch.

(v) Genau fünf Aussagen auf dieser Liste sind falsch.

Abgabe: Mittwoch, 15.10.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).