

Analysis I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach n , daß für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge (d.h. einer Menge mit n Elementen) ist gleich $\binom{n}{k}$. Können Sie auch einen direkten Beweis geben, der ohne vollständige Induktion auskommt?

Hinweis für den Induktionsbeweis: Als n -elementige Menge können Sie die Menge $\{1, \dots, n\}$ nehmen. Überlegen Sie sich, wie viele k -elementige Teilmengen es gibt, die das Element 1 enthalten, und wie viele es gibt, die das Element 1 nicht enthalten.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a) \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Beachten Sie dazu auch die Bonusaufgabe unten.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion den Binomischen Lehrsatz, d.h. folgende Aussage: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(b) Folgern Sie daraus, daß

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Alternativ kann auch dies mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

Aufgabe 4. Wir wollen beweisen, daß alle natürlichen Zahlen gleich sind, z.B. $3 = 7$. Definiere dazu für $a, b \in \mathbb{N}$ das Maximum $\max(a, b)$ als die größere der beiden Zahlen a, b . Für $a = b$ ist $\max(a, b) := a = b$. Sei \mathcal{A}_n die Aussage: "Falls $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n$, dann $a = b$."

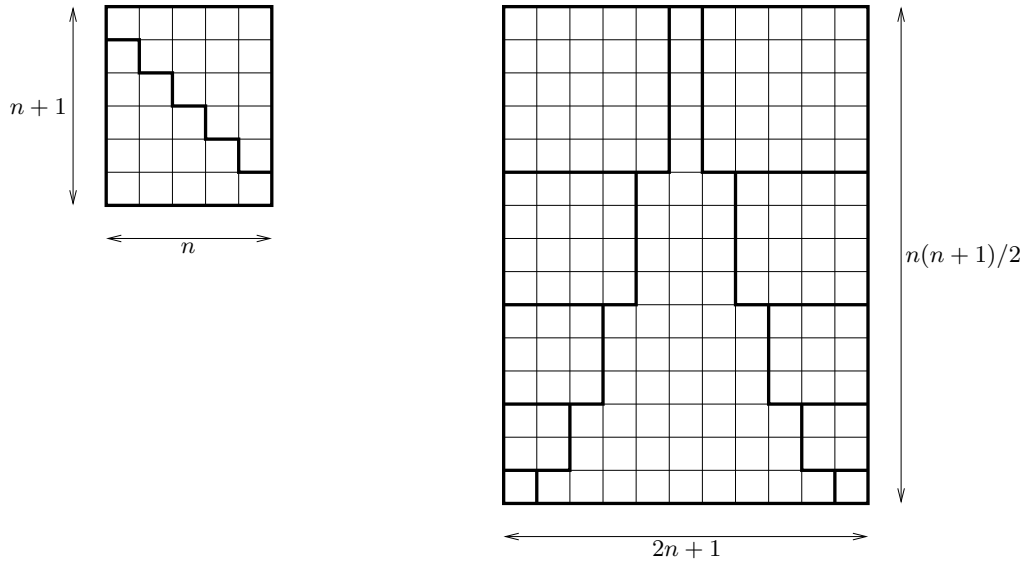
(i) **Induktionsanfang:** \mathcal{A}_1 ist wahr, denn aus $\max(a, b) = 1$ folgt $a = b = 1$.

(ii) **Induktionsschluß:** Angenommen, \mathcal{A}_n ist wahr für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n + 1$. Setze $\alpha = a - 1$, $\beta = b - 1$. Dann gilt $\max(\alpha, \beta) = n$, also $\alpha = \beta$, da \mathcal{A}_n gilt. Damit folgt $a = b$, demnach gilt \mathcal{A}_{n+1} .

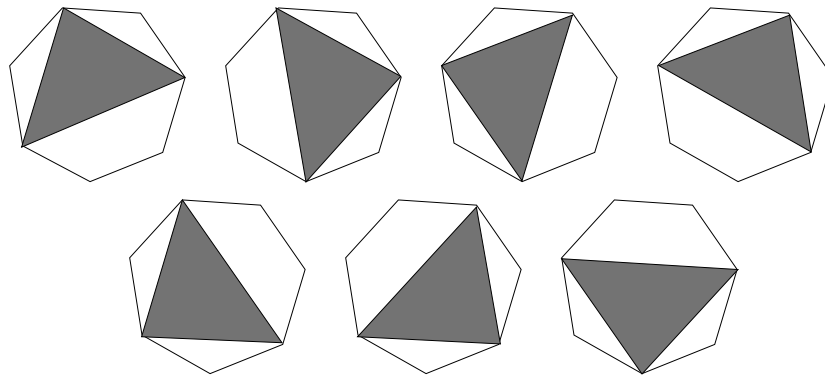
Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig, $r := \max(a, b)$. Da \mathcal{A}_n für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt insbesondere \mathcal{A}_r , also $a = b$. Wo liegt der Trugschluß?

b.w.

Bonusaufgabe. Die Induktionsbeweise in Aufgabe 2 haben offensichtlich den Nachteil, daß man die Summenformel schon kennen muß, um sie zu beweisen. Leiten Sie die Formeln in Aufgabe 2 mittels der folgenden Bilder her.



Knobelaufgabe. Gegeben sei ein reguläres Polygon mit n Seiten. Wie viele Dreiecke gibt es, deren Ecken auch Ecken des Polygons sind, aber deren Seiten keine Seiten des Polygons sind? Für $n = 7$ gibt es zum Beispiel sieben solche Dreiecke.



Abgabe: Mittwoch, 22.10.14
 bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
 im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).