WS 2015/16

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Menge der reellen Zahlen, deren Dezimalbruchentwicklung die Ziffer 2 enthält, meßbar ist.

Aufgabe 2. Die Cantormenge $C \subset [0,1]$ ist wie folgt definiert. Entferne zunächst aus dem Intervall $[0,1]$ das offene Intervall $(1/3, 2/3)$. Aus den verbleibenden Intervallen $[0,1/3]$ und $[2/3,1]$ entfernen wir wieder jeweils das offene mittlere Drittel, d.h. die Intervalle $(1/9, 2/9)$ und $(7/9, 8/9)$. Diesen Prozeß iterieren wir. Zeigen Sie:

(a) Die Elemente von C sind genau die Zahlen, die sich in der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

mit $a_k \in \{0,2\}$ schreiben lassen. Zum Beispiel sind

$$\frac{1}{3} = 0,02222...$$

und

$$\frac{2}{3} = 0,20000...$$

Elemente von C.

(b) Jeder Punkt von C ist ein Häufungspunkt von C.

(c) Die Cantormenge ist kompakt.

(d) Sei $x \in C$ in der Darstellung von (a) gegeben. Begründen Sie, warum die durch

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$

gegebene Abbildung $\varphi\colon\ C \to [0,1]$ wohldefiniert, stetig, monoton und surjektiv ist.

(e) Folgern Sie mit (d), oder durch Variation des zweiten Cantorschen Diagonalverfahrens aus der Analysis I, daß die Cantormenge die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat, also insbesondere überabzählbar ist.

(f) Die Menge C ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Bemerkung: Mit (d) und (f) kann man folgern, daß es mehr Nullmengen gibt als die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Andererseits kann man mittels der iterativen Konstruktion von Borelmengen zeigen, daß die Borelalgebra von $\mathbb{R}$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat. Hieraus folgt die Existenz von Lebesgueschen Nullmengen, die keine Borelschen Mengen sind.

b.w.

Aufgabe 3. Wie in der Vorlesung sei ausgehend von einem Mengenring $\mathcal{A}$ auf einer Menge X und einem σ-endlichen Prämaß μ auf $\mathcal{A}$ ein äußeres Maß μ^* auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ definiert, und es sei $\mathcal{M}^*$ die σ-Algebra der μ^*-meßbaren Mengen. Wir schreiben $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ für das Maß auf $\mathcal{M}^*$. Wie wir gesehen hatten, enthält $\mathcal{M}^*$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Zeigen Sie, daß man zu $M \in \mathcal{M}^*$ stets $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ mit $A \subset M \subset B$ und $\mu(M \setminus A) = 0 = \mu(B \setminus M)$ finden kann.

Aufgabe 4. Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen führen wir folgende Relation ein:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie:

(a) Dies ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Jede Äquivalenzklasse hat einen Repräsentanten im Intervall $I := [0, 1)$.

Nun wählen wir aus jeder Äquivalenzklasse solch einen Repräsentanten aus (dies tun zu können setzt das sogenannte Auswahlaxiom voraus). Die Menge all dieser Punkte nennen wir M. Wir wollen zeigen, daß $M \subset I$ nicht Lebesgue-meßbar ist.

Für $q \in \mathbb{Q} \cap I$ schreiben wir die Menge $M + q$ als

$$M + q = A_q \sqcup B_q$$

mit $A_q := (M + q) \cap I$.

(c) Zeigen Sie, daß die Mengen A_q und $B_q - 1$ disjunkte Teilmengen von I sind, und daß wir eine disjunkte Zerlegung des Intervalls I bekommen durch

$$\bigcup_q \big(A_q \sqcup (B_q - 1)\big),$$

wobei q die Menge $\mathbb{Q} \cap I$ durchläuft.

(d) Folgern Sie, daß M nicht meßbar sein kann.

Bonusaufgabe. Folgern Sie aus der Konstruktion in Aufgabe 4, daß man das Intervall $I = [0, 1)$ als disjunkte abzählbare Vereinigung

$$I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

von Teilmengen $I_n \subset I$ derart schreiben kann, daß es eine Zerlegung $\mathbb{N} = N_1 \sqcup N_2$ gibt, so daß auch

$$I = \bigsqcup_{n \in N_1} I'_n$$

und

$$I = \bigsqcup_{n \in N_2} I'_n$$

gilt, wobei die Menge I'_n jeweils durch Translation aus I_n hervorgeht, d.h. $I'_n = I_n + q_n$ für ein geeignetes $q_n \in \mathbb{Q}$.

Dies ist eine schwache Fassung des Banach-Tarski-Paradoxons. Die starke Fassung, bei der man mit endlichen Zerlegungen arbeitet, gilt erst ab Dimension 3.

Abgabe: Mittwoch, 18.11.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).