

Analysis III

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Im \mathbb{R}^2 betrachten wir die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

die einen stückweise glatten Rand hat, und die 1-Form ω , definiert durch

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad \omega_{(0,0)} = 0.$$

Welche Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften hat ω auf M und ∂M ? Berechnen Sie $\int_M d\omega$ und $\int_{\partial M} \omega$. Warum ist der Satz von Gauß nicht anwendbar? (Daß der Rand nur stückweise glatt ist, ist nicht das Problem.)

Aufgabe 2. Auf dem \mathbb{R}^3 betrachten wir die 2-Form

$$\omega = xy dx \wedge dy + 2x dy \wedge dz - 2y dz \wedge dx.$$

- (a) Rechnen Sie nach, daß ω geschlossen ist.
 (b) Bestimmen Sie, ausgehend von einem Ansatz

$$\eta = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz,$$

eine 1-Form η mit $d\eta = \omega$.

- (c) Zeigen Sie auf möglichst einfache Weise, daß das Integral von ω über die obere Hemisphäre

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

verschwindet.

Aufgabe 3. Es sei C der Kreis im \mathbb{R}^2 , der durch die Gleichung $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ beschrieben wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (xy^2 dy - x^2y dx)$$

- (a) direkt;
 (b) unter Verwendung der Green–Riemannschen Formel.

Aufgabe 4. Es sei Q ein achsenparalleler Quader im \mathbb{R}^3 . Man definiere den orientierten Rand ∂Q in naheliegender Weise und beweise den Gaußschen Integralsatz

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega,$$

wobei ω eine in einer Umgebung von Q stetig differenzierbare 2-Form ist, durch Anwendung des Satzes von Fubini.

Abgabe: Mittwoch, 27.1.16
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).