WS 2016/2017 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 3

Seien $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ zwei reguläre parametrisierte Raumkurven, definiert auf einem Intervall (a, b). Die Kurve $\boldsymbol{\beta}$ heißt eine **Evolvente** von $\boldsymbol{\alpha}$, falls für jedes $t \in (a, b)$ gilt: $\boldsymbol{\beta}(t)$ liegt auf der Tangente von $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\alpha}(t)$, und die Tangenten von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ in $\boldsymbol{\alpha}(t)$ bzw. $\boldsymbol{\beta}(t)$ sind orthogonal zueinander. Die Kurve $\boldsymbol{\beta}$ heißt eine **Evolute** von $\boldsymbol{\alpha}$, falls $\boldsymbol{\alpha}$ eine Evolvente von $\boldsymbol{\beta}$ ist.

Aufgabe 1. Sei $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve.

(a) Zeichnen Sie qualitativ die Evolvente für eine typische ebene Kurve (siehe dazu auch (b)).

(b) Zeigen Sie, daß für eine Evolvente $\boldsymbol{\beta}$ von $\boldsymbol{\alpha}$ folgendes gilt:

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + (c - s)\,\mathbf{T}(s),$$

wobei c eine Konstante ist und $\mathbf{T} = \boldsymbol{\alpha}'$. Beachte: s ist i.a. nicht die Bogenlänge für $\boldsymbol{\beta}$.

(c) Unter welchen Bedingungen ist $\boldsymbol{\alpha}(s)+(c - s)\,\mathbf{T}$ eine reguläre Kurve und damit eine Evolvente von $\boldsymbol{\alpha}$?

Wegen (b) ist $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$ ein Maß für die Bogenlänge auf $\boldsymbol{\alpha}$. Daher läßt sich $\boldsymbol{\beta}$ konstruieren, indem man einen Faden von der Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ abwickelt.

Aufgabe 2. Die **Zykloide** ist die durch

$$\begin{cases} x(t) &= a(t + \sin t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \end{cases}$$

für $t \in \mathbb{R}$ definierte ebene Kurve.

(a) Zeigen Sie, daß die Zykloide die Kurve ist, die ein Punkt auf dem Rand eines Rades vom Radius a beschreibt, das auf der Gerade $y = 2a$ abrollt, wobei für $t = 0$ der genannte Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ liegt.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide auf dem Zeitintervall $[0, t]$.

(c) Berechnen Sie explizit die Evolvente der Zykloide (durch Verwendung von Aufgabe 1(b) — beachten Sie, daß t nicht die Bogenlänge ist). Zeigen Sie damit explizit, daß diese Evolvente wieder eine Zykloide ist.

Bemerkung. Diese Konstruktion spielte eine wichtige Rolle in Christian Huygens' $(1629 - 1695)$ Konstruktion einer Pendeluhr von hoher Präzision.

b.w.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Krümmung k einer regulären Raumkurve $t \mapsto \boldsymbol{\beta}(t)$ gegeben ist durch

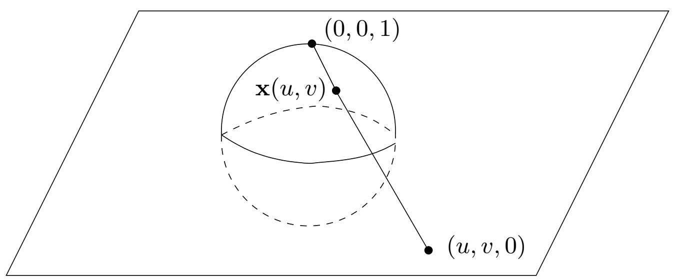
$$k = \frac{|\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \ddot{\boldsymbol{\beta}}|}{|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^3}.$$

Hinweis: Schreiben Sie dazu $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(s(t))$, wobei $s \mapsto \boldsymbol{\alpha}(s)$ die Parametrisierung nach Bogenlänge ist. Dann gilt beispielsweise $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}' \cdot \dot{s}$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die 2-Sphäre

$$\mathrm{S}^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Die Gerade durch $(u,v,0) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $(0,0,1)$ schneidet S^2 in einem weiteren Punkt. Dieser sei mit $\mathbf{x}(u,v)$ bezeichnet.



(a) Berechnen Sie $\mathbf{x}(u,v)$ und zeigen Sie, daß $\mathbf{x} \colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück ist. Die zu $\mathbf{x}$ inverse Abbildung $\mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ heißt **stereographische Projektion**.

(b) Sei $\mathbf{y} \colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ analog definiert, indem man statt $(0,0,1)$ den Punkt $(0,0,-1)$ verwendet. Bestimmen Sie die Abbildung $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ explizit und verifizieren Sie, daß diese Abbildung differenzierbar ist. Was ist der maximale Definitionsbereich dieser Abbildung?

Abgabe: Mittwoch, 9.11.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).