

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Flächenstücke

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, \log t)$$

und

$$\mathbf{y}(t, \varphi) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, \varphi)$$

für $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$.

- (a) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten (g_{ij}) bzw. (\tilde{g}_{ij}) für die beiden Flächenstücke, und zeigen Sie damit, daß $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ **keine** Isometrie ist.
- (b) Zeigen Sie, daß $K(\mathbf{x}(t, \varphi)) = K(\mathbf{y}(t, \varphi)) = -1/(1+t^2)^2$.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Umkehrung des *theorema egregium* i.a. falsch ist: Ein Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$ zwischen Flächen, der $K_M(p) = K_N(\varphi(p))$ erfüllt für alle $p \in M$, muß keine lokale Isometrie sein.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß die Isometrien $\varphi: M \rightarrow M$ einer Fläche M in natürlicher Weise eine Gruppe bilden, die sogenannte **Isometriegruppe** von M .

- (b) Zeigen Sie, daß die Isometriegruppe von S^2 gleich der Gruppe der orthogonalen (3×3) -Matrizen ist.

Aufgabe 3. Ein Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$ heißt **konforme Abbildung**, falls

$$\langle d\varphi(\mathbf{X}), d\varphi(\mathbf{Y}) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda(p) \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_p$$

für alle $p \in M$ und $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p M$, wobei $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion ist. Analog zum Begriff der lokalen Isometrie spricht man von **lokal konformen** Abbildungen. Zeigen Sie, daß S^2 lokal konform zur Ebene ist.

Hinweis: stereographische Projektion.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die sogenannte Enneperfläche, gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

und zeigen Sie:

- (a) Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind $g_{11} = g_{22} = (1 + u^2 + v^2)^2$, $g_{12} = 0$.
- (b) Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind $L_{11} = 2$, $L_{22} = -2$, $L_{12} = 0$.
- (c) Die Hauptkrümmungen sind $k_1 = -k_2 = 2 / (1 + u^2 + v^2)^2$.
- (d) Die Krümmungslinien sind die Koordinatenkurven.
- (e) Die asymptotischen Kurven (vergl. Übungsblatt 7) sind gegeben durch $u + v = \text{konst.}$ und $u - v = \text{konst.}$

Bonusaufgabe. Betrachte das Katenoid

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$$

und das Helikoid

$$\mathbf{y}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, u),$$

wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus ist, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie f so, daß $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ eine Isometrie ist. Versuchen Sie, diese Isometrie im \mathbb{R}^3 zu visualisieren. (Vergl. dazu die in der Literaturliste angegebenen Bücher von Bär und do Carmo.)

Bonusaufgabe. (a) Seien \mathbf{X} und \mathbf{Y} Vektorfelder auf einer Fläche M . In einer Parametrisierung $\mathbf{x}: U \rightarrow M$ definiere

$$Z^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j},$$

wobei $\mathbf{X} = X^i \mathbf{x}_i$ und $\mathbf{Y} = Y^j \mathbf{x}_j$. Analog definiere in der Parametrisierung $\mathbf{y}: V \rightarrow M$

$$\bar{Z}^\alpha = \bar{X}^\beta \frac{\partial \bar{Y}^\alpha}{\partial v^\beta} - \bar{Y}^\beta \frac{\partial \bar{X}^\alpha}{\partial v^\beta}.$$

Zeige: $Z^i = \bar{Z}^\alpha \partial u^i / \partial v^\alpha$. Das bedeutet, daß $Z^i \mathbf{x}_i = \bar{Z}^\alpha \mathbf{y}_\alpha = \mathbf{Z}$ ein Vektorfeld ist. \mathbf{Z} wird mit $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ bezeichnet und heißt **Lie-Klammer** von \mathbf{X} und \mathbf{Y} . Zeige:

- (i) $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = 0$.
 - (ii) $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$.
 - (iii) $[u^1 \mathbf{x}_2, u^1 u^2 \mathbf{x}_1] = (u^1)^2 \mathbf{x}_1 - u^1 u^2 \mathbf{x}_2$.
- (b) Sei $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Dabei bezeichne $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ die in der Bonusaufgabe von Übungsblatt 6 eingeführte kovariante Ableitung von \mathbf{Y} bezüglich \mathbf{X} . Zeige: $\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$.

Bemerkung. \mathbf{T} heißt **Torsion** und ist für allgemeinere kovariante Ableitungen nicht Null.

- (c) Zeige: $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ ist die Orthogonalprojektion auf $T_p M$ der Richtungsableitung von \mathbf{Y} in Richtung von \mathbf{X} .