Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Sei M eine Fläche, die durch Koordinatenumgebungen $U_1, U_2 \subset M$ überdeckt wird. Nehmen Sie an, $U_1 \cap U_2$ hat zwei Zusammenhangskomponenten W_1, W_2, und daß die Jacobische Matrix des Koordinatenwechsels positive Determinante in W_1 hat und negative Determinante in W_2. Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist. Dies zeigt insbesondere, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

(b) M_2 sei eine orientierbare Fläche und $\varphi\colon M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung, die ein lokaler Diffeomorphismus ist bei jedem $p \in M_1$. Zeigen Sie, daß M_1 orientierbar ist.

Aufgabe 2. Ein n-gon ist eine stückweise glatte, reguläre Kurve auf einer Fläche M, deren n glatte Segmente Geodätische sind und die eine Scheibe in M berandet.

(a) Sei M eine Fläche mit $K \leq 0$. Zeigen Sie, daß es kein n-gon für $n = 0, 1, 2$ gibt. (Ein 0-gon ist eine geschlossene Geodätische, die eine Scheibe in M berandet.)

(b) Finden Sie ein Beispiel einer Fläche mit $K < 0$, auf der eine geschlossene Geodätische existiert.

Aufgabe 3. Sei R ein Polygon in einem Flächenstück $\mathbf{x}\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß das Integral $\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K dA$ den Winkel mißt, um den sich ein entlang der Randkurve $\boldsymbol{\gamma}$ von R parallel verschobenes Vektorfeld $\mathbf{X}$ dreht. Wir nehmen dazu an, daß der metrische Tensor die Form $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$ mit $h > 0$ hat (geodätische Parallelkoordinaten). Schreibe $\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{x}\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right)$ mit Bogenlängenparameter s und

$$\mathbf{X}(s) = \cos\varphi(s)\, \mathbf{x}_1\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) + \frac{\sin\varphi(s)}{h}\, \mathbf{x}_2\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right).$$

Zeigen Sie nun, daß

$$\varphi'(s) = -h_1\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) \cdot \left(\gamma^2\right)'(s).$$

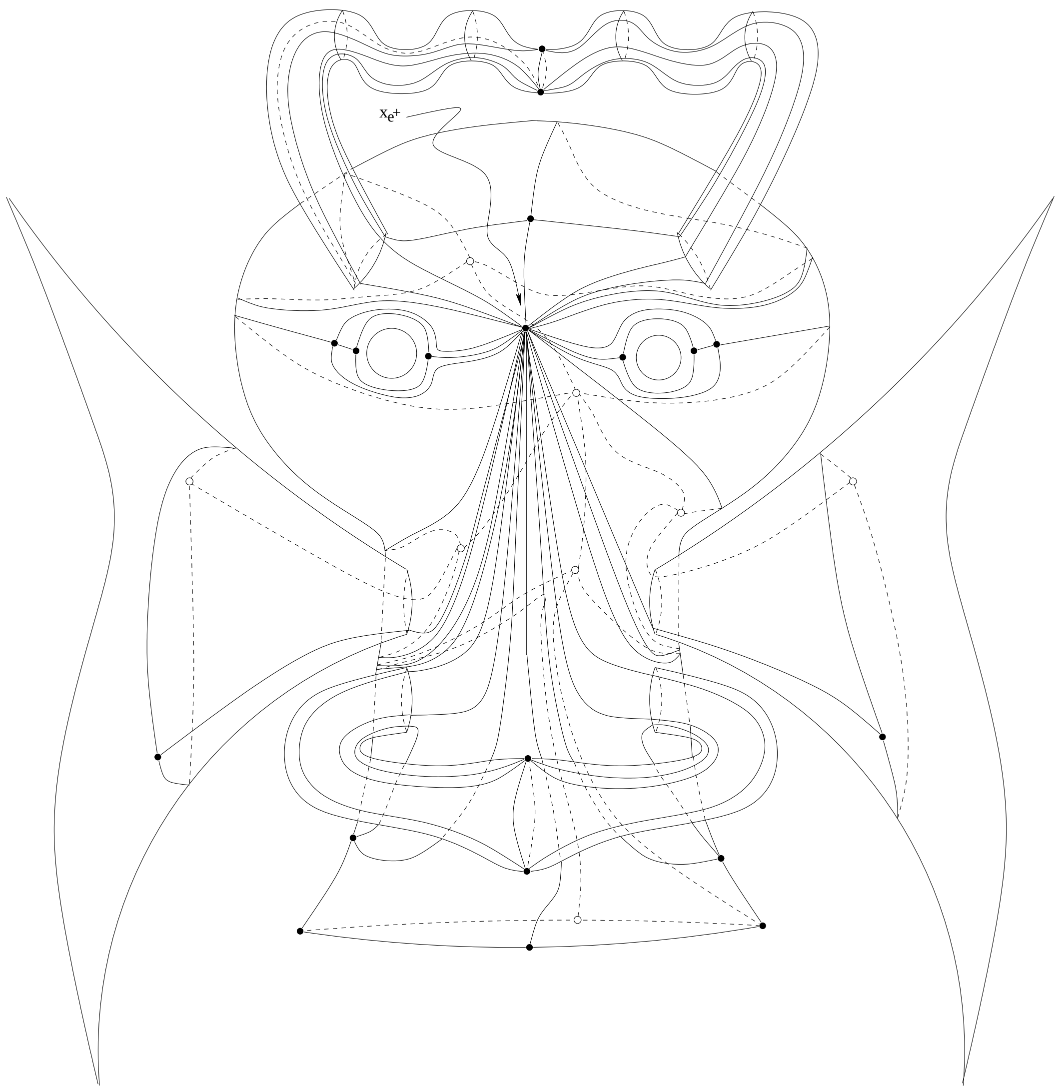
Folgern Sie daraus, daß sich $\mathbf{X}$ bei einem Umlauf von $\boldsymbol{\gamma}$ um den Winkel

$$\triangle\varphi = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \varphi' ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K dA$$

dreht.

Aufgabe 4. (Fürs Warten aufs Christkind).
Sei $\mathbf{X}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit einer isolierten Nullstelle im Ursprung $\mathbf{0}$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, daß in der Kreisscheibe D^2_ε vom Radius ε um $\mathbf{0}$ keine weiteren Nullstellen von $\mathbf{X}$ liegen. Der **Index** der Nullstelle $\mathbf{0}$ ist die Anzahl der vollen Umdrehungen (mit Vorzeichen) von $\mathbf{X}$ längs des in positiver Richtung durchlaufenen Kreises $S^1_\varepsilon = \partial D^2_\varepsilon$. Analog definiert man den Index der isolierten Nullstelle eines Vektorfeldes auf einer beliebigen Fläche.

Bestimmen Sie die Indizes der Nullstellen des im Bild gezeigten Vektorfeldes auf dem Weihnachtsengel. Der Punkt x_e^+ markiert eine Quelle des Vektorfeldes; das Bild zeigt einige ausgesuchte Flußlinien. Alle anderen Nullstellen des Vektorfeldes sind Senken oder hyperbolische Punkte.



Frohe Weihnachten!

Abgabe: Mittwoch, 11.1.17
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).