WS 2017/18

Prof. Hansjörg Geiges
Sebastian Durst, M.Sc.

Geometrische Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Schreiben Sie den Torusknoten $T(p,q)$ (siehe Übungsblatt 3) als Abschluß eines geeigneten Zopfes. Zeigen Sie mit dieser Darstellung von $T(p,q)$, daß $T(2,3)$ und $T(3,2)$ isotop zum (links- oder rechtshändigen?) Kleeblattknoten sind. Wie erhält man den Kleeblattknoten mit der anderen Händigkeit als Abschluß eines Zopfes?

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Zopfes $b \in B_n$ mit der Eigenschaft, daß $\sigma(b) \in S_n$ eine Permutation der Ordnung n ist, aber der Abschluß $\beta(b)$ kein Knoten. (Es geht mit $n = 6$.)

(c) Zeigen Sie, daß $b := b_1 b_2^{-1} b_3^2 b_4^{-2} b_2^{-1} b_1 \in B_5$ ein reiner Zopf ist, d.h. $b \in K_5$. Schreiben Sie b als Produkt der Erzeuger b_{ij} (und ihrer Inversen) von K_5.

Aufgabe 2. Seien $f_i, g_i \colon X \to X$, $i = 0, 1$, Homöomorphismen eines topologischen Raumes X, wobei f_0 isotop zu f_1, und g_0 isotop zu g_1 ist. Zeigen Sie, daß dann $f_0 \circ g_0$ isotop zu $f_1 \circ g_1$ ist. Erklären Sie damit, wie man auf der Menge der Isotopieklassen von Homöomorphismen $X \to X$ eine Gruppenstruktur erhält. (In der Vorlesung verwenden wir dies beispielsweise bei der Definition der Gruppe H_n der Isotopieklassen von Homöomorphismen der 2-Scheibe mit n Löchern.)

Aufgabe 3. (a) Sei $h \colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ ein Homöomorphismus der $(n-1)$-Sphäre

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Zeigen Sie, daß durch

$$\tilde{h}(tx) := th(x) \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \in S^{n-1},\ t \in [0,1]$$

ein Homöomorphismus der n-Scheibe

$$D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

definiert wird. (Auch diese Aussage wird als 'Alexander-Trick' bezeichnet.)

(b) Jede 3-Mannigfaltigkeit mit einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 0 ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Aufgabe 4. Seien p, q teilerfremde natürliche Zahlen mit $p \geq 2$. Man fasse die 3-Sphäre als Einheitssphäre im $\mathbb{C}^2$ auf. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\sigma(z, w) = \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/p} z, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} q/p} w\right)$$

ist auf S^3 eine Wirkung der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$ mit Erzeuger σ definiert.

(b) Diese Wirkung ist fixpunktfrei.

(c) Der Quotient $L(p,q) := S^3/\mathbb{Z}_p$ ist eine 3-Mannigfaltigkeit. (Die Mannigfaltigkeit $L(p,q)$ heißt **Linsenraum**.)

(d) Der Linsenraum $L(p,q)$ besitzt eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1. Beschreiben Sie auch die Verklebeabbildung dieser Heegaard-Zerlegung.

(e) Es gibt einen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus $L(p,q) \to L(p,-q)$.

Bonusaufgabe. Auf dem 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ sei die Kurve $S^1 \times \{*\}$ mit μ bezeichnet, die Kurve $\{*\} \times S^1$ mit λ. Hierbei sei $*$ ein fest gewählter Punkt auf S^1. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(T^2)$ mit Basispunkt $(*,*)$ sei mittels der Erzeuger $[\mu]$ und $[\lambda]$ mit $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ identifiziert.

(a) Beschreiben Sie den Effekt eines Dehn-Twists entlang $\mu' := S^1 \times \{-*\}$ bzw. $\lambda' := \{-*\} \times S^1$ auf die Fundamentalgruppe.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $h \mapsto h_*$, die jedem Homöomorphismus h von T^2, der den Basispunkt $(*,*)$ fest läßt, den induzierten Homomorphismus h_* auf der Fundamentalgruppe zuordnet, einen surjektiven Homomorphismus

$$\mathrm{Homöo}(T^2) \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$$

definiert. (Man kann zeigen, daß dies sogar ein Isomorphismus ist.)

Abgabe: Mittwoch 15.11.17
bis spätestens 16:00 Uhr
im Büro 206 des MI