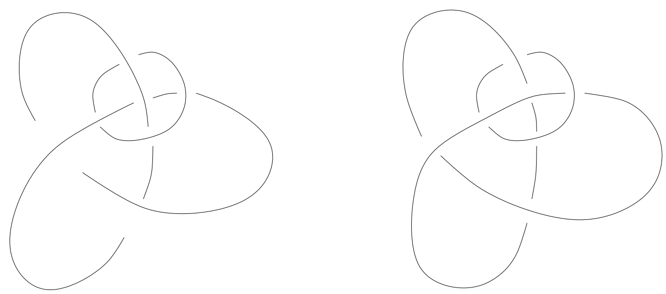
WS 2017/18

Prof. Hansjörg Geiges
Sebastian Durst, M.Sc.

Geometrische Topologie

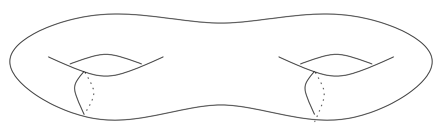
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Verschlingungen (in $\mathbb{R}^3$ oder S^3) nicht isotop zueinender sind, aber homöomorphe Komplemente besitzen.

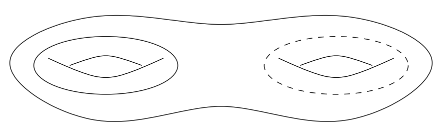


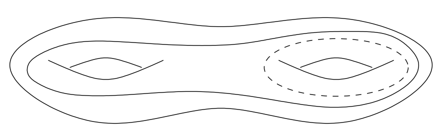
Bemerkung: Nach einem tiefen Satz von Gordon und Luecke sind *Knoten* mit homöomorphen Komplementen isotop zueinander.

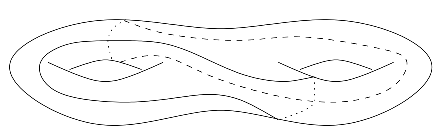
Aufgabe 2. Auf dem Rand des Henkelkörpers vom Geschlecht 2 seien die Kurven u_1, u_2 wie folgt gewählt.



Zeigen Sie, daß die drei folgenden Heegaard Diagramme (gezeigt sind jeweils $f(u_1), f(u_2)$) alle die 3-Sphäre liefern.







b.w.

Aufgabe 3. Der **Meridian** μ des Volltorus $S^1 \times D^2$ ist die Kurve $* \times \partial D^2$, der **Längengrad** λ die Kurve $S^1 \times *$. Hier steht $*$ für einen beliebigen Punkt in S^1 bzw. ∂D^2.

(a) Geben Sie (für $k \in \mathbb{Z}$) eine explizite Formel für einen Homöomorphismus von $S^1 \times D^2$ auf sich selbst an, der μ auf μ und λ auf eine Kurve der Form $k\mu + \lambda$ abbildet (d.h. auf eine Kurve in der Homotopieklasse letzterer Kurve in der Fundamentalgruppe von $S^1 \times \partial D^2$).

(b) Ein Homöomorphismus von $\partial(S^1 \times D^2)$ erweitert genau dann zu einem Homöomorphismus von $S^1 \times D^2$, wenn (bis auf Isotopie) μ auf $\pm\mu$ geschickt wird.

(c) Man entferne aus dem Volltorus $S^1 \times D^2$ einen dünneren offenen Volltorus $S^1 \times \mathrm{Int}(D^2_{1/2})$.

   (i) Jeder Homöomorphismus f von $\partial(S^1 \times D^2)$ erweitert zu einem Homöomorphismus $\tilde{f}$ von $(S^1 \times D^2) \setminus \big(S^1 \times \mathrm{Int}(D^2_{1/2})\big)$.

   (ii) Beschreiben Sie einen Homöomorphismus zwischen dem Volltorus

$$S^1 \times D^2 = \Big((S^1 \times D^2_{1/2}) + (S^1 \times D^2) \setminus \big(S^1 \times \mathrm{Int}(D^2_{1/2})\big)\Big)/x \sim x,$$

   wobei die Identifikation für die $x \in \partial(S^1 \times D^2_{1/2})$ ausgeführt wird, und der berandeten 3-Mannigfaltigkeit

$$\Big((S^1 \times D^2_{1/2}) + (S^1 \times D^2) \setminus \big(S^1 \times \mathrm{Int}(D^2_{1/2})\big)\Big)/x \sim f(x),$$

   wobei f als Homöomorphismus von $\partial(S^1 \times D^2_{1/2})$ aufgefaßt wird.

Warum liefert dies keinen Widerspruch zu (b)?

Aufgabe 4. (a) Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus von S^1 ist isotop zur Identität.

(b) Jeder Homöomorphismus von $S^1 \times S^1$, der einen vorgegebenen Meridian μ und einen Längenkreis λ jeweils orientierungstreu auf sich abbildet (aber nicht notwenigerweise punktweise festläßt), ist isotop zur Identität.

(c) Jeder Dehn-Twist einer Fläche entlang einer einfach geschlossenen Kurve, die die Fläche trennt (d.h. deren Komplement zwei Zusammenhangskomponenten hat), ist isotop zur Identität.

Abgabe: Mittwoch 29.11.17
bis spätestens 16:00 Uhr
im Büro 206 des MI