

Geometrische Topologie

Übungsblatt 7

- Aufgabe 1.** (a) Die **Kleinsche Flasche** ist die geschlossene, nichtorientierbare Fläche, die man durch Verkleben zweier Möbiusbänder entlang des Randes S^1 erhält. Zeigen Sie, daß die Kleinsche Flasche Rand einer 3-Mannigfaltigkeit ist.
- (b) Zeigen Sie, daß man die Kleinsche Flasche alternativ als verbundene Summe zweier projektiver Ebenen $\mathbb{R}P^2$ erhalten kann. Hier ist $\mathbb{R}P^2$ der Quotientenraum $S^2/x \sim -x$. Die **verbundene Summe** zweier Flächen entsteht dadurch, daß man aus beiden eine 2-Scheibe D^2 entfernt und die Reststücke entlang der S^1 -Ränder identifiziert.
- (c) Geben Sie einen alternativen Beweis von (a) mittels (b).
- (d) (Außer Konkurrenz; für Hörer mit Vorkenntnissen in algebraischer Topologie) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}P^2$ nicht Rand einer 3-Mannigfaltigkeit M sein kann.

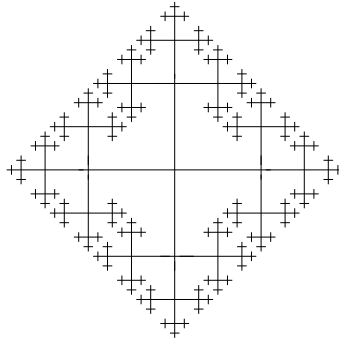
Hinweis: Angenommen, so ein M existierte. Dann könnte man die geschlossene 3-Mannigfaltigkeit $M \cup_{\mathbb{R}P^2} M$ bilden. Die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz (am besten mit \mathbb{Z}_2 -Koeffizienten) führt zu einem Widerspruch. Alternativ kann man sich überlegen (über eine duale Triangulierung), daß jede geschlossene ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeit Euler-Charakteristik $\chi = 0$ hat. Andererseits müßte $\chi(\mathbb{R}P^2) \equiv \chi(M \cup_{\mathbb{R}P^2} M) \pmod{2}$ gelten.

Aufgabe 2. Im Beweis von Satz 5.1' der Vorlesung haben wir stillschweigend angenommen, daß die Fläche F Geschlecht $g \geq 1$ oder $k \geq 1$ Randkomponenten hat, so daß man nach geeignetem Aufschneiden D_{k+2g-1}^2 mit $k + 2g - 1 \geq 0$ erhält.

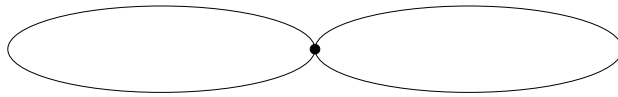
Für den Fall $g = 0 = k$, d.h. die 2-Sphäre, kann man mit dem Satz von Baer argumentieren. Dieser besagt, daß zwei homotope einfach geschlossene Kurven auf einer Fläche (im Inneren der Fläche, falls der Rand nicht leer ist) sogar ambient isotop sind. Es gibt also eine Homöomorphismus, der isotop zur Identität ist, und die eine auf die andere Kurve abbildet.

Verwenden Sie dies, um Satz 5.1' für S^2 zu beweisen.

Aufgabe 3. Sei \tilde{X} der unendliche Baum wie im Bild angedeutet.



Sei $X = S^1 \vee S^1$ die Einpunktvereinigung von zwei Kopien von S^1 .



Definiere $p: \tilde{X} \rightarrow X$ wie folgt: Alle Ecken von \tilde{X} gehen auf den gemeinsamen Punkt der beiden Kreise. Die horizontalen Äste gehen (für wachsendes x) im mathematisch positiven Sinne auf den ersten Kreis, die vertikalen Äste (für wachsendes y) auf den zweiten Kreis. Zeigen Sie, daß dies eine Überlagerung definiert. Ist diese regulär? Welche Gruppe operiert gegebenenfalls auf \tilde{X} , so daß der Quotientenraum gleich X ist?

Aufgabe 4. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

- (a) Sei α ein **Weg** in Y , d.h. eine stetige Abbildung $\alpha: [0, 1] \rightarrow Y$. Sei $y_0 = \alpha(0)$. Wähle einen Punkt $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Dann gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\alpha}$ in X mit $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.
- (b) Sei Q ein zusammenhängender topologischer Raum und $F: Q \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, die wir als eine Homotopie von Abbildungen $Q \rightarrow Y$ auffassen können. Außerdem gebe es eine stetige Abbildung $\tilde{F}: Q \times \{0\} \rightarrow X$ mit $p \circ \tilde{F} = F|_{Q \times \{0\}}$. Zeigen Sie, daß es dann eine stetige Abbildung $\tilde{F}: Q \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt, die auf $Q \times \{0\}$ mit der gegebenen Abbildung übereinstimmt und $p \circ \tilde{F} = F$ erfüllt. Mit anderen Worten: Man kann das folgende Diagramm vervollständigen:

$$\begin{array}{ccc}
 Q \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{F}} & X \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\
 Q \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & Y
 \end{array}$$

Man nennt dies die **Hochhebungseigenschaft** für Homotopien.

- (c) Falls X wegzusammenhängend ist und Y einfach zusammenhängend, so ist p bereits ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Eine Überlagerung $\tilde{Y} \rightarrow Y$ mit \tilde{Y} zusammenhängend und einfach zusammenhängend heißt **universelle Überlagerung**. Aufgabe (c) zeigt die Eindeutigkeit der universellen Überlagerung (zu gegebenen Y) unter Annahme des Wegzusammenhangs.

Abgabe: Mittwoch 6.12.17
 bis spätestens 16:00 Uhr
 im Büro 206 des MI