

Analysis I

Übungsblatt 1

Wichtiger Hinweis: Einige der Begriffe und Notationen auf diesem Übungsblatt werden erst in der Vorlesung am Freitag erklärt.

Die **Präsenzaufgaben** werden jeweils in der nächsten Übung vor Ort bearbeitet. Sie sollten sich also bis dann Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, möglichst auch in schriftlicher Form; es sind aber keine Lösungen abzugeben.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben zählen für die Klausurzulassung.

Gelegentlich stellen wir **Bonusaufgaben**. Diese dürfen schriftlich bearbeitet und abgegeben werden, und Sie können damit zusätzliche Übungspunkte erreichen.

Die **Knobelaufgaben** dienen zum weiteren Training Ihrer grauen Zellen. Lösungen zu diesen Aufgaben werden nicht bewertet, können aber bei ausreichender Zeit in den Übungsgruppen oder dem Tutorium besprochen werden.

Präsenzaufgabe 1. Es seien M, N, M', N' Mengen. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Menge

$$(M \times N) \setminus (M' \times N')$$

im allgemeinen verschieden ist von der Menge

$$(M \setminus M') \times (N \setminus N').$$

Zeigen Sie, andererseits, daß $(M \times N) \setminus (M' \times N')$ stets als Vereinigung zweier Mengen der Form $A \times B$ geschrieben werden kann.

Hier bezeichnet $M \times N$ das **kartesische Produkt** der Mengen M und N , d.h.

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}.$$

Hinweis: Zeichnen Sie eine Skizze (z.B. mit Teilmengen von \mathbb{R}), die die Fragestellungen veranschaulicht.

Präsenzaufgabe 2. Gegeben seien Mengen A, B, C und Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$. Die Abbildung f heißt **injektiv**, falls für alle $x, x' \in A$ gilt: wenn $x \neq x'$, dann auch $f(x) \neq f(x')$. Die Abbildung f heißt **surjektiv**, falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$. Analog gelten die Definitionen für g .

Zeigen Sie:

- (a) Sind f und g injektiv, so auch die Komposition $g \circ f: A \rightarrow C$.
- (b) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f .
- (c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Bedingung “ f ist surjektiv” in (c) nicht weggelassen werden kann.

b.w.

Hausaufgabe 1. Es seien M, N Mengen und $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Weiter seien A und B Teilmengen von M , sowie C und D Teilmengen von N . Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Hier bezeichnet z.B. $f^{-1}(C)$ das Urbild von C unter der Abbildung f , also

$$f^{-1}(C) = \{x \in M: f(x) \in C\}.$$

Kann man die falsche(n) Aussage(n) zu (einer) richtigen Aussage(n) machen, indem man die Mengengleichheit zu einer Mengeninklusion \subset oder \supset abschwächt?

Hausaufgabe 2. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mittels der Quantoren \forall und \exists . Negieren Sie dann die Aussagen formal. Übersetzen Sie diese negierten Aussagen zurück in "Umgangssprache". Hier ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (a) Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- (b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für jedes $x_0 \in I$ und jedes $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Bemerkung. Hier handelt es sich um die Definition von **Stetigkeit** bzw. **gleichmäßiger Stetigkeit**, die wir später im Detail kennenlernen werden.

Knobelaufgabe. Hier ist eine Liste mit fünf Aussagen, die sich aufeinander beziehen. Welche dieser Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

- (i) Genau eine Aussage auf dieser Liste ist falsch.
- (ii) Genau zwei Aussagen auf dieser Liste sind falsch.
- (iii) Genau drei Aussagen auf dieser Liste sind falsch.
- (iv) Genau vier Aussagen auf dieser Liste sind falsch.
- (v) Genau fünf Aussagen auf dieser Liste sind falsch.

Abgabe der Hausaufgaben: Montag, 15.10.18
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

**Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an,
andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!**