WS 2018/2019

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Sebastian Durst

Analysis I

Übungsblatt 6

Präsenzaufgabe. (a) Zeigen Sie, daß für jede komplexe Zahl z mit $|z| > 1$ und jede natürliche Zahl k gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0.$$

Hinweis: Schreiben Sie $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$. Die Binomialentwicklung liefert dann

$$|z|^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1}.$$

Schätzen Sie diesen Ausdruck z.B. für $n > 2k$ geeignet ab, so daß Sie eine Abschätzung der Form

$$\frac{n^k}{|z|^n} < c(k,x) \cdot \frac{1}{n}$$

erhalten, wobei $c(k,x)$ eine reelle Zahl ist, die nur von k und x abhängt.

(b) Entscheiden Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren, und falls ja, was ihr Grenzwert ist.

$$a_n = \sqrt{\frac{2+\cos n}{n}}, \qquad b_n = \pi^{-(\sin n)/n}, \qquad c_n = 2^{\cos n\pi}.$$

Hausaufgabe 1. Einem Krug, der 1 Liter eines Gemisches aus Diäthylenglykol und Wein enthält, werden p Liter $(0 < p < 1)$ entnommen und durch reines Diäthylenglykol ersetzt. Von dieser neuen Mischung werden sodann p Liter aus dem Krug gegossen und durch reinen Wein ersetzt. Dieses aus der österreichischen Weinherstellung bekannte Doppelverfahren wird fortgesetzt. Zeigen Sie, daß das Mischungsverhältnis Wein zu Diäthylenglykol konvergiert, und bestimmen Sie seinen Grenzwert.

Die folgende Aufgaben verwenden den Begriff der **uneigentlichen Konvergenz**: Wir setzen

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

und definieren eine Ordnung durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Außerdem setzen wir

$$\begin{aligned} \infty + x &:= \infty && \text{für } x \in \mathbb{R}\cup\{\infty\} \\ -\infty + x &:= -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\} \\ \infty \cdot x := \infty, \quad (-\infty)\cdot x &:= -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R}^+\cup\{\infty\} \\ \infty \cdot x := -\infty, \quad (-\infty)\cdot x &:= \infty && \text{für } x \in \mathbb{R}^-\cup\{-\infty\} \\ x/\infty := 0, \quad x/(-\infty) &:= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ausdrücke wie “$0 \cdot \infty$” und “$(-\infty) + \infty$” sind *nicht* definiert!

b.w.

Wir sagen, eine reelle Folge (a_n) **konvergiert uneigentlich** gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $n_0 = n_0(C) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \geq C$ (bzw. $a_n \leq C$) für alle $n \geq n_0$.

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Analog erweitert man die Definition des Limes inferior und des Limes superior auf unbeschränkte reelle Folgen, indem man $\inf\{a_k \colon k \geq n\} = -\infty$ setzt, falls $\{a_k \colon k \geq n\}$ nicht nach unten beschränkt ist, und analog für das Supremum.

Hausaufgabe 2. Geben Sie Beispiele reeller Zahlenfolgen (a_n), (b_n) mit $\lim a_n = \infty$ und $\lim b_n = 0$ an, so daß je einer der folgenden Fälle eintritt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(iv) Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Hausaufgabe 3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für eine reelle Zahlenfolge (a_n) gilt: Falls (a_n) nach unten beschränkt ist ($a_n \geq C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$), so gilt $\liminf a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, andernfalls $\liminf a_n = -\infty$.

(b) Seien (a_n), (b_n) konvergente oder uneigentlich konvergente reelle Zahlenfolgen mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

   (i) Falls $a + b$ definiert ist, dann konvergiert $(a_n + b_n)$ (evtl. uneigentlich) gegen $a + b$.

   (ii) Falls ab definiert ist, dann gilt $\lim(a_n b_n) = ab$.

Bonusaufgabe. Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(ii) $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$ sind Häufungspunkte von (a_n).

(iii) Falls (a_n) konvergent ist, so gilt $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 19.11.18
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an, andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!