WS 2018/2019

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Sebastian Durst

Analysis I

Übungsblatt 8

Präsenzaufgabe. (a) Es sei $f(x) = 1 + x^2$. Bestimmen Sie eine Funktion g, so daß

$$f(g(x)) = 1 + x^2 - 2x^3 + x^4.$$

(b) Es sei $g(x) = 1 + \sqrt{x}$. Finden Sie eine Funktion f, so daß

$$f(g(x)) = 4 + 3\sqrt{x} + x.$$

(c) In welchen Punkten ist die Funktion

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x - x^3 + |2x - 3| \end{array}$$

differenzierbar? Bestimmen Sie die Ableitung von f in diesen Punkten.

Hausaufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Durchschnitt zweier folgenkompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt. Zeigen Sie dies auf zwei Weisen:

(i) direkt aus der Definition von Folgenkompaktheit;

(ii) mittels des Satzes von Bolzano–Weierstraß.

(b) Der Durchschnitt unendlich vieler folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(c) Die Vereinigung zweier folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(d) Ist die Vereinigung unendlich vieler folgenkompakter Mengen stets folgenkompakt?

(e) Geben Sie ein Beispiel von nicht-leeren abgeschlossenen Mengen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset.$$

(f) Für nicht-leere folgenkompakte Mengen $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ im $\mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset.$$

Hausaufgabe 2. Zeigen Sie, daß die durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Sie dürfen verwenden, daß die Funktion $x \mapsto \sin x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist (dies wird später in der Vorlesung gezeigt).

b.w.

Hausaufgabe 3. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = f(x + 1/n)$ gibt. Was bedeutet diese Aussage geometrisch?

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz in geeigneter Weise auf die für $0 \le x \le 1 - 1/n$ durch $g(x) := f(x) - f(x + 1/n)$ definierte Funktion g an.

Bonusaufgabe. Sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Dann gibt es keine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau n-mal annimmt.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

Knobelaufgabe. Bestimmen Sie die reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 3.12.18
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an, andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!