WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen einer nicht-leeren Menge X.

(a) Begründen Sie, möglichst in Worten, daß für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{k} M_j = X \setminus \big(\bigcap_{j=1}^{k} (X \setminus M_j)\big)$$

und

$$\bigcap_{j=1}^{k} M_j = X \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{k} (X \setminus M_j)\big).$$

(b) Setzt man

$$M'_j := M_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} M_k,$$

so kann die Vereinigung $\cup_j M_j$ als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen geschrieben werden:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} M'_j.$$

Zeigen Sie damit: Enthält eine Menge $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X die leere Menge, mit jeder Menge auch ihr Komplement, mit je zwei Mengen ihren Durchschnitt, und mit jeder abzählbaren Familie disjunkter Mengen deren Vereinigung, so ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

Aufgabe 2. Ist $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so heißt

$$f_*\mathcal{M} := \{N \subset Y\colon\ f^{-1}(N) \in \mathcal{M}\}$$

das **direkte Bild** von $\mathcal{M}$. Zeigen Sie, daß $f_*\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf Y ist, und zwar die größte (d.h. mit den meisten Teilmengen von Y), für die f meßbar ist.

Aufgabe 3. (a) Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum, Y eine nicht-leere Menge, und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein System von Teilmengen von Y. Sei $\mathcal{M}'$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra auf Y. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann meßbar ist bezüglich $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$, wenn $f^{-1}(N) \in \mathcal{M}$ für alle $N \in \mathcal{S}$. Betrachten Sie dazu das Urbild unter f von Komplementen bzw. abzählbaren Vereinigungen.

(b) Folgern Sie aus (a), daß eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen bezüglich der Borelalgebren auf diesen Räumen meßbar ist.

b.w.

(c) Zeigen Sie, daß die Menge der Intervalle (a, ∞) mit $a \in \mathbb{Q}$ die Borelalgebra auf $\mathbb{R}$ erzeugt. Überlegen Sie sich dazu, wie man Intervalle der Form $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ erzeugen kann, und daraus alle offenen Teilmengen. Hier bedeutet 'erzeugen', daß man Komplemente und abzählbare Vereinigungen bereits konstruierter Mengen bilden darf.

(d) Folgern Sie aus (c), daß eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ von einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ nach $\mathbb{R}$ mit der Borelalgebra genau dann meßbar ist, wenn für jedes $a \in \mathbb{Q}$ die Menge

$$\{f > a\} := \{x \in X\colon\ f(x) > a\}$$

meßbar ist.

(e) Zeigen Sie, daß monotone Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar sind.

Aufgabe 4. (a) Begründen Sie sorgfältig, warum für eine Folge $f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, von meßbaren Funktionen auch die Funktion $\inf_j f_j$, definiert durch

$$(\inf_j f_j)(x) := \inf\{f_j(x)\colon\ j \in \mathbb{N}\},$$

meßbar ist. Hinweis: $\inf\{f_j(x)\colon\ j \in \mathbb{N}\} = -\sup\{-f_j(x)\colon\ j \in \mathbb{N}\}$.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ offen, und sei $f\colon\ \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$f(x) := \max\big\{0, \sup\{y \in [0, \infty)\colon\ (x, y) \in U\}\big\}.$$

Zeigen Sie, daß f bezüglich der Borelalgebren auf $\mathbb{R}$ bzw. $[0, \infty]$ meßbar ist.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß $\overline{\mathbb{R}}$ homöomorph ist zum Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Abgabe: Mittwoch, 16.10.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).