

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (a) Sei γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche M , und sei \mathbf{S} die intrinsische Normale entlang γ . Zeigen Sie, daß \mathbf{S} genau dann parallel entlang γ ist, wenn γ eine Geodätische ist.

(b) Sei γ wie in (a), mit Krümmung $k \neq 0$. Sei \mathbf{X}_N die Komponente von \mathbf{N} tangential an M . Zeigen Sie, daß $\mathbf{X}_N = \mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$, und daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $\mathbf{X}_N \equiv 0$,
- (ii) γ ist eine Geodätische,
- (iii) \mathbf{X}_N ist parallel entlang γ .

Aufgabe 2. Der 2-Torus T^2 ist die Fläche im \mathbb{R}^3 , die durch Rotation des Kreises $(r-2)^2 + z^2 = 1$ in der (r, z) -Ebene um die z -Achse entsteht. Er läßt sich (bis auf einen Meridian und einen Längengreis) parametrisieren durch

$$\mathbf{x}(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u), \quad (u, v) \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform und die Weingarten-Abbildung der 2-Sphäre vom Radius r mittels der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad \text{für } (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

(b) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform des Helikoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$$

und des Katenoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av).$$

Hier sind a und c positive reelle Konstanten.

- Aufgabe 4.** (a) Zeigen Sie, daß die Isometrien $\varphi: M \rightarrow M$ einer Fläche M in natürlicher Weise eine Gruppe bilden, die sogenannte **Isometriegruppe** von M .
- (b) Zeigen Sie, daß die Isometriegruppe von S^2 gleich der Gruppe der orthogonalen (3×3) -Matrizen ist.

Abgabe: Dienstag, 22.12.20

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs

Dieses Blatt wird in KW 1 des neuen Jahres besprochen