WS 2020/21

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Poincaré-Scheibe, d.h. $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon\ u^2 + v^2 < 1\}$ mit der Metrik

$$(g_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} 4/(1 - u^2 - v^2)^2 & 0 \\ 0 & 4/(1 - u^2 - v^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wie in Aufgabe 3 von Übungsblatt 6 ein Beispiel für eine abstrakt definierte Fläche, d.h. es gibt keine Fläche $\mathbf{x} \colon U \to \mathbb{R}^3$, so daß $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ die erste Fundamentalform ist. Wir nennen die so definierte Metrik die **hyperbolische Metrik** auf U.

(a) Bestimmen Sie Christoffelsymbole und Gaußkrümmung.

(b) Zeigen Sie, daß Durchmesser von U und Kreisbögen, die den Einheitskreis $u^2 + v^2 = 1$ orthogonal schneiden, Geodätische sind, und daß jede Geodätische von dieser Form ist.

Aufgabe 2. Wir fassen die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ aus Aufgabe 3 von Blatt 6 und die Poincaré-Scheibe U aus der vorigen Aufgabe als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, daß durch

$$\varphi(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^2_+ \to U$ definiert wird, der bezüglich der jeweiligen hyperbolischen Metrik eine Isometrie ist.

Aufgabe 3. (a) Sei M eine Fläche, die durch Koordinatenumgebungen $U_1, U_2 \subset M$ überdeckt wird. Nehmen Sie an, $U_1 \cap U_2$ hat zwei Zusammenhangskomponenten W_1, W_2, und daß die Jacobische Matrix des Koordinatenwechsels positive Determinante in W_1 hat und negative Determinante in W_2. Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist. Dies zeigt insbesondere, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

(b) M_2 sei eine orientierbare Fläche und $\varphi \colon M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung, die ein lokaler Diffeomorphismus ist bei jedem $p \in M_1$. Zeigen Sie, daß M_1 orientierbar ist.

Aufgabe 4. Ein n-gon ist eine stückweise glatte, reguläre Kurve auf einer Fläche M, deren n glatte Segmente Geodätische sind und die eine Scheibe in M berandet.

(a) Sei M eine Fläche mit $K \leq 0$. Zeigen Sie, daß es kein n-gon für $n = 0, 1, 2$ gibt. (Ein 0-gon ist eine geschlossene Geodätische, die eine Scheibe in M berandet.)

(b) Finden Sie ein Beispiel einer Fläche mit $K < 0$, auf der eine geschlossene Geodätische existiert.

Abgabe: Dienstag, 19.1.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs