Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei R ein Polygon in einem Flächenstück $\mathbf{x}\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß das Integral $\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\,dA$ den Winkel mißt, um den sich ein entlang der Randkurve $\boldsymbol{\gamma}$ von R parallel verschobenes Vektorfeld $\mathbf{X}$ dreht. Wir nehmen dazu an, daß der metrische Tensor die Form $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$ mit $h > 0$ hat (geodätische Parallelkoordinaten). Schreibe $\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{x}\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right)$ mit Bogenlängenparameter s und

$$\mathbf{X}(s) = \cos\varphi(s)\; \mathbf{x}_1\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) + \frac{\sin\varphi(s)}{h}\; \mathbf{x}_2\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right).$$

Zeigen Sie nun, daß

$$\varphi'(s) = -h_1\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) \cdot \left(\gamma^2\right)'(s).$$

Folgern Sie daraus, daß sich $\mathbf{X}$ bei einem Umlauf von $\boldsymbol{\gamma}$ um den Winkel $\triangle\varphi = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \varphi'\,ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\,dA$ dreht.

Aufgabe 2. (a) Sei $\gamma\colon [a,b] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$. Sei α der Winkel zwischen der Flächennormalen $\mathbf{n}$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{B}$ an die Kurve γ. Zeigen Sie, daß die Krümmung k von γ (als Raumkurve) und die geodätische Krümmung k_g die Beziehung $k_g = k\cos\alpha$ erfüllen.

(b) Sei γ der Breitenkreis des Breitengrads $\phi_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ auf der 2-Sphäre S^2. Zeigen Sie, daß $k = 1/\sin\phi_0$. Benutzen Sie (a), um $k_g = \cot\phi_0$ zu folgern.

(c) Zeigen Sie mittels des lokalen Satzes von Gauß–Bonnet, daß die von γ (positiv) berandete Teilfläche von S^2 den Flächeninhalt $2\pi(1 - \cos\phi_0)$ hat.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß $(0,0)$ eine Nullstelle der folgenden Vektorfelder ist und berechnen Sie deren Index in der Ebene in $(0,0)$:

(i) $\mathbf{X}(u,v) = (u,v)$,

(ii) $\mathbf{X}(u,v) = (-u,v)$,

(iii) $\mathbf{X}(u,v) = (u,-v)$,

(iv) $\mathbf{X}(u,v) = (u^2 - v^2, -2uv)$,

(v) $\mathbf{X}(u,v) = (u^3 - 3uv^2, v^3 - 3u^2v)$.

(b) Kann es vorkommen, daß der Index einer Nullstelle Null ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 4. Was kann man über die Existenz von Vektorfeldern ohne Nullstellen auf nichtkompakten Flächen aussagen?

Abgabe: Dienstag, 26.1.21
bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs