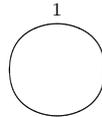


Chirurgie

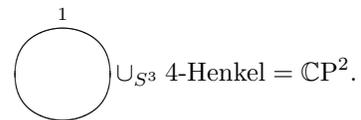
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Die 2-Sphäre $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ hat Selbstschnittzahl $+1$, wobei $\mathbb{C}P^2$ die durch die komplexe Struktur gegebene Orientierung trägt.

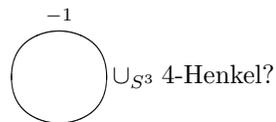
(b) Der durch das Kirby-Diagramm



gegebene 2-Henkelkörper W_2 hat $\partial W_2 = S^3$, und



(c) Was ist



Begründen Sie zunächst, warum

$$\partial(\text{circle with framing } -1) = S^3.$$

Aufgabe 2. Sei W eine geschlossene n -Mannigfaltigkeit mit einer nach dem Index angeordneten Henkelzerlegung. Es bezeichne W_i die Vereinigung aller k -Henkel mit $k \leq i$.

(a) Eine Orientierung von W ist ein Atlas von W , dessen Übergangsfunktionen orientierungserhaltend sind. Zeigen Sie, daß eine Homotopieklasse von Trivialisierungen von TW über W_0 , die auf W_1 erweitern, eine Orientierung von W darstellt.

(b) Zeigen Sie, daß man mittels dieser Auffassung von Orientierung eine Kohomologieklassse in $H^1(W; \mathbb{Z}_2)$ konstruieren kann, die genau dann verschwindet, wenn W orientierbar ist. Diese Klasse ist das sogenannte **topologische Hindernis** für die Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit W .

Hinweis: Das Tangentialbündel über W_0 ist trivial. Das bedeutet, Sie müssen ein Hindernis dafür finden, daß eine Trivialisierung von W_0 auf W_1 erweitert.

(c) Sei nun W orientierbar. Eine **Spin-Struktur** ist eine Homotopieklasse von Trivialisierungen des Tangentialbündels TW über W_1 , die über W_2 erweitern. Zeigen Sie die Existenz eines topologischen Hindernisses in $H^2(W; \mathbb{Z}_2)$ für die Existenz einer solchen Trivialisierung.

Aufgabe 3. Sei M eine geschlossene, orientierte 3-Mannigfaltigkeit und K ein orientierter, nullhomologer, eingebetteter Knoten. Es bezeichne $M_n(K)$ die Mannigfaltigkeit, die aus M durch Chirurgie mit Rahmung n (bzgl. der Flächenrahmung) entlang K entsteht. Berechnen Sie die Homologiegruppen von $M_n(K)$.

Aufgabe 4. Leiten Sie eine Heegaard-Zerlegung von $M_n(K)$ her, die nur Daten des Knotens K und einer Heegaard-Zerlegung von M benutzt.

Abgabe: **Donnerstag 17.11.22 in der Vorlesung.**
Die Übung am 16.11. entfällt wegen des Kolloquiums.