Chirurgie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie:

(a) Ist N eine weitere glatte n-Mannigfaltigkeit und ist $M\#N$ homöomorph zu S^n, so ist auch M homöomorph zu S^n.

Hinweis: Es gilt der Satz von Schönflies (vergl. G.E. Bredon, Topology and Geometry, Theorem IV.19.11): Ist $h\colon\ S^{n-1}\times[-1,1]\to S^n$ eine stetige Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, so ist der Abschluß jeder der beiden Komponenten von $S^n\setminus h(S^{n-1}\times\{0\})$ homöomorph zu D^n.

(b) Eine n-dimensionale Homotopiesphäre Σ ist eine n-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu S^n ist. Zeigen Sie: Ist $D^n\subset\Sigma$ eine eingebettete n-Scheibe, so ist $\Sigma\setminus D^n$ zusammenziehbar (d.h. homotopieäquivalent zu einem Punkt).

(c) Ist M orientiert, so berandet $M\#\overline{M}$ eine Mannigfaltigkeit, die den Homotopietyp von $M\setminus D^n$ hat, mit $D^n\subset M$ eine eingebettete n-Scheibe.

(d) $\Sigma\#\overline{\Sigma}$ berandet eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 2. (a) Sei M eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n\geq 6$ mit einfach zusammenhängendem Rand, und sei $D^n\subset\operatorname{Int}(M)$ eine eingebettete n-Scheibe.

(i) $M\setminus\operatorname{Int}(D^n)$ ist ein h-Kobordismus zwischen $S^{n-1}=\partial D^n$ und ∂M.

(ii) M ist diffeomorph zu D^n.

(b) Beweisen Sie mittels (a) und Aufgabe 1 die 5-dimensionale Poincaré-Vermutung: Eine Homotopiesphäre der Dimension 5 ist homöomorph zur 5-Sphäre.

Abgabe: Mittwoch 7.12.22 in der Übung.