WS 2022/23 Prof. Hansjörg Geiges

Chirurgie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und

$$\ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

der singuläre Kettenkomplex von X, so daß $H_1(X;\mathbb{Z}) = \ker(\partial_1)/\mathrm{im}(\partial_2)$.

(a) Zeigen Sie, daß folgende Sequenz spaltet:

$$0 \longrightarrow \ker(\partial_1) \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1/\ker(\partial_1) \longrightarrow 0$$

(b) Es gelte $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$. Beweisen Sie ohne Verwendung des universellen Koeffiziententheorems, daß

$$H^2(X;\mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(H_2(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2).$$

Hier ist $H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ die Homologie des Komplexes mit Kettengruppen

$$C^k := \mathrm{Hom}(C_k(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$$

und Randoperator $\delta\colon C^k \to C^{k+1}$ gegeben duch $\delta f = f \circ \partial$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie $\pi_1(\mathrm{SO}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Sei W ein Kobordismus zwischen M_0 und M_1. Ist W eine Spin-Mannigfaltigkeit, so auch M_0 und M_1.

Abgabe: Mittwoch 14.12.22 in der Übung.