WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabe 1. (a) Es seien A, B Teilmengen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, und sei $U \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Lin}(U) = U$,
(ii) $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(A)) = \mathrm{Lin}(A)$,
(iii) $\mathrm{Lin}(A \cup B) = \mathrm{Lin}(A) + \mathrm{Lin}(B)$,
(iv) $\mathrm{Lin}(A \cap B) \subset \mathrm{Lin}(A) \cap \mathrm{Lin}(B)$.

Geben Sie ein Beispiel an, daß in (iv) im allgemeinen nicht die Gleichheit gilt.

Zur Notation in (iii): Für Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ ist mit $U_1 + U_2$ die Teilmenge

$$\{u_1 + u_2 \colon\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\} \subset V$$

gemeint. Diese Teilmenge ist wieder ein Unterraum von V und wird **Summe** von U_1 und U_2 genannt.

(b) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Teilmengen $A = \{a_1, a_2\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$a_1 = (1, -2, -1), \quad a_2 = (-1, -3, 2)$$

und

$$b_1 = (5, 5, -8), \quad b_2 = (1, -7, 0), \quad b_3 = (-3, -4, 5)$$

gegeben. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Lin}(A) \subset \mathrm{Lin}(B)$. Gilt hier auch die Gleichheit?

Präsenzaufgabe 2. Sind die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 0, \dots, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad v_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, 1), \quad v_n = (1, 0, \dots, 0, 1)$$

im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig?

Hausaufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind genau die folgenden:

(i) $\{(0, 0)\}$,
(ii) jede Ursprungsgerade, d.h. eine Gerade durch den Punkt $(0, 0)$,
(iii) ganz $\mathbb{R}^2$.

(b) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien U_1, U_2 Unterräume von V. Zeigen Sie: Gilt $U_1 \cup U_2 = V$, so muß bereits $U_1 = V$ oder $U_2 = V$ gelten.

Hausaufgabe 2. Zeigen Sie, daß für vier paarweise verschiedene Zahlen $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ die vier Vektoren $v_i = (1, c_i, c_i^2, c_i^3)$, $i = 1, \dots, 4$, im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Abgabe der Hausaufgaben: **Dienstag 31.10. (wg. Allerheiligen)**
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).