WS 2023/24 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 8

Präsenzaufgabe 1. Es sei (v_1, v_2, v_3, v_4) ein linear unabhängiges 4-Tupel von Vektoren in einem reellen Vektorraum V. Wir definieren Vektoren $w_1, w_2, w_3 \in V$ durch

$$\begin{aligned} w_1 &= v_2 - v_3 + 2v_4, \\ w_2 &= v_1 + 2v_2 - v_3 - v_4, \\ w_3 &= -v_1 + v_2 + v_3 + v_4. \end{aligned}$$

Ist das 3-Tupel (w_1, w_2, w_3) linear unabhängig?

Präsenzaufgabe 2. Eine reelle (3×3)-Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *magisches Quadrat*, wenn alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und beide Diagonalsummen einander gleich sind. Es wird nicht gefordert (wie bei spezielleren Definitionen magischer Quadrate), daß die Einträge der Matrix paarweise verschieden sind.

(a) Finden Sie Beispiele von magischen Quadraten.

(b) Zeigen Sie, daß a_{22} das arithmetische Mittel der a_{ij} ist. Drücken Sie a_{22} mittels der Zeilen-/Spalten-/Diagonalsumme s aus.

(c) Zeigen Sie, daß die Menge der magischen Quadrate ein Unterraum des 9-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

(d) Bestimmen Sie eine Basis dieses Unterraumes. Formulieren Sie dazu die Bedingung, ein magisches Quadrat zu sein, als *homogenes* lineares Gleichungssystem in den a_{ij} und s, d.h. als System von acht Gleichungen in 10 Variablen. Mittels (b) läßt sich die Variable s direkt entfernen.

Hausaufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die folgende reelle Matrix invertierbar ist, und bestimmen Sie die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x \in \mathbb{R}^6$ des reellen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b.w.

(c) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(i) Es seien $b, c \in \mathbb{K}^n$ gegeben, und das Gleichungssystem $Ax = b$ habe genau eine Lösung. Hat dann auch das Gleichungssystem $Ax = c$ genau eine Lösung?

(ii) Es sei $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben, und das System $Ax = b$ habe keine Lösung. Gibt es ein $c \in \mathbb{K}^n$, so daß $Ax = c$ mehr als eine Lösung hat?

Hausaufgabe 2. Eine quadratische Matrix $N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **nilpotent**, falls $N^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotent ist. Berechnen Sie dazu explizit N^k für $k = 2, \dots, n$.

(b) Es sei $N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie, daß $E - N$, wobei E die Einheitsmatrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$ bezeichnet, invertierbar ist, indem Sie eine explizite Formel für $(E - N)^{-1}$ als geeignete Linearkombination von Potenzen von N (einschließlich $N^0 := E$) angeben.

(c) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{K}$ die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 6.12.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).