WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 9

Präsenzaufgabe 1. Das **Kreuzprodukt** oder **Vektorprodukt** von zwei Vektoren

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

im $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$x \times y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Außerdem betrachten wir auf dem $\mathbb{R}^3$ das Skalarprodukt analog zum $\mathbb{R}^2$:

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Entsprechend definieren wir die Länge eines Vektors durch $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(a) Verifizieren Sie, daß

$$|x \times y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 - \langle x, y\rangle^2.$$

Wie wir im Rahmen der Theorie der euklidischen Vektorräume sehen werden, kann man daraus folgern — ähnlich wie in Kapitel 0 für $\det(x, y)$, wenn $x, y \in \mathbb{R}^2$ —, daß $|x \times y|$ gleich dem Flächeninhalt des von x und y im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms ist.

(b) Zeigen Sie, daß $x \times y$ orthogonal zu x und y ist, d.h. $\langle x \times y, x\rangle = \langle x \times y, y\rangle = 0$.

(c) Zeigen Sie, daß für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ (als Spaltenvektoren aufgefaßt) gilt:

$$\det(x, y, z) = \langle x \times y, z\rangle.$$

Präsenzaufgabe 2. Berechnen Sie induktiv die Determinante der reellen $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 1. Seien a und b Elemente eines Körpers $\mathbb{K}$, und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\det A = (b - a)^{n-1}\big(b + (n - 1)a\big).$$

b.w.

Hausaufgabe 2. Es sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix, und b sei ein Vektor im $\mathbb{K}^n$. Wir haben in der Vorlesung gesehen, daß die eindeutige Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathtt{t}}$ des Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben ist durch

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}b,$$

wobei $\widetilde{A}$ die Adjunkte von A bezeichnet.

Wir wollen zeigen, daß diese Formel äquivalent ist zu

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei in der zweiten Determinante die i-te Spalte von A durch den Vektor b ersetzt wurde.

(a) Leiten Sie diese Formel direkt aus der expliziten Darstellung der Einträge $\tilde{a}_{ij}$ der Adjunkte her.

(b) Überlegen Sie sich alternativ, daß aus der Tatsache, daß x eine Lösung von $Ax = b$ ist, folgt: Für jedes $i = 1, \dots n$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & (x_i a_{1i} - b_1) & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & (x_i a_{ni} - b_n) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

da die Spalten der Matrix linear abhängig sind. Folgern Sie mit der Linearität der Determinante in der i-ten Spalte erneut die Formel für x_i.

Bonusaufgabe. Bestimmen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die reelle Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und man berechne gegebenenfalls die inverse Matrix A_λ^{-1}. Klären Sie dabei die Frage der Invertierbarkeit sowohl mittels Rangbestimmung als auch mittels der Determinante.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 13.12.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).