WS 2025/26 Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit einem Ansatz von der Form

$$(a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0) + \lambda\,(p, q, r)\,,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

daß das einschalige Hyperboloid

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

auf zwei Arten als Regelfläche dargestellt werden kann.

Aufgabe 2. Die **Tangente** an eine reguläre Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ im $\mathbb{R}^n$ im Punkt $t = t_0$ ist die Gerade

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \colon \ \mathbf{w} = \boldsymbol{\alpha}(t_0) + \lambda \mathbf{T}(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

(a) Sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\boldsymbol{\alpha}$ die durch $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, g(t))\,,\ t \in \mathbb{R}$, gegebene ebene Kurve. Bestimmen Sie die Tangente an $\boldsymbol{\alpha}$ in $t = t_0$ und vergleichen Sie dies mit der aus der Analysis I bekannten Tangente an einen Graphen.

(b) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t)$ eine reguläre Kurve ist und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $t = \pi/3$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Helix $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$ (mit $r, h > 0$ gegeben) in $t = t_0$. Zeigen Sie, daß der Winkel zwischen $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ und dem Vektor $(0, 0, 1)$ konstant ist. Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2+1}, \left(s + \sqrt{s^2+1}\right)^{-1}, \sqrt{2}\log\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right)$$

nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 4. Sei $\boldsymbol{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie, daß dann die Krümmung von $\boldsymbol{\alpha}$ gegeben ist durch

$$k(s) = |x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|\,.$$

Abgabe: Mittwoch 22.10.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
Lösungen sind individuell abzugeben,
nicht als Gruppenabgaben.