

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Gegeben seien die offenen Mengen

$$V = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

$$U = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1, u^1 < 0 \text{ für } u^2 = 0\}.$$

- (a) Begründen Sie, warum durch $f(\theta, \varphi) := (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ eine Bijektion $V \rightarrow U$ definiert ist.
- (b) Zeigen Sie, daß f ein Diffeomorphismus ist, indem Sie
- (i) (lokal) eine Umkehrfunktion angeben,
 - (ii) die Jacobische von f berechnen.

Aufgabe 2. Seien α und β zwei reguläre parametrisierte Raumkurven, definiert auf einem Intervall (a, b) . Die Kurve β heißt eine **Evolvente** von α , falls für jedes $t \in (a, b)$ gilt: $\beta(t)$ liegt auf der Tangente von α in $\alpha(t)$, und die Tangenten von α und β in $\alpha(t)$ bzw. $\beta(t)$ sind orthogonal zueinander. Die Kurve β heißt eine **Evolute** von α , falls α eine Evolvente von β ist.

- (a) Zeichnen Sie qualitativ die Evolvente für eine typische ebene Kurve (siehe dazu auch (b)).
- (b) Zeigen Sie, daß für eine Evolvente β einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve α

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c - s) \mathbf{T}(s)$$

gilt, wobei c eine Konstante ist und $\mathbf{T} = \alpha'$. Beachte: s ist i. a. nicht die Bogenlänge für β .

- (c) Unter welchen Bedingungen ist $\alpha(s) + (c - s) \mathbf{T}$ eine reguläre Kurve und damit eine Evolvente von α ?

Wegen (b) ist $|\alpha - \beta|$ ein Maß für die Bogenlänge auf α . Daher läßt sich β konstruieren, indem man einen Faden von der Kurve α abwickelt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Krümmung k einer regulären Raumkurve $t \mapsto \beta(t)$ gegeben ist durch

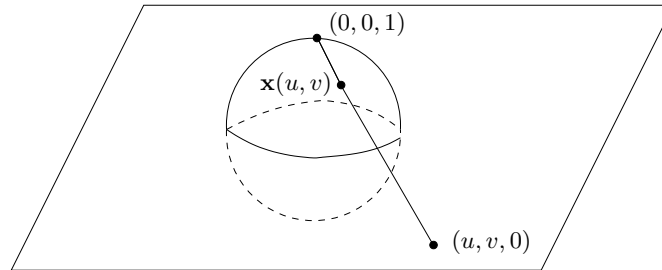
$$k = \frac{|\dot{\beta} \times \ddot{\beta}|}{|\dot{\beta}|^3}.$$

Hinweis: Schreiben Sie dazu $\beta(t) = \alpha(s(t))$, wobei $s \mapsto \alpha(s)$ die Parametrisierung nach Bogenlänge ist. Dann gilt beispielsweise $\dot{\beta} = \alpha' \cdot \dot{s}$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die 2-Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Die Gerade durch $(u, v, 0) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $(0, 0, 1)$ schneidet S^2 in einem weiteren Punkt. Dieser sei mit $\mathbf{x}(u, v)$ bezeichnet.



- Berechnen Sie $\mathbf{x}(u, v)$ und zeigen Sie, daß $\mathbf{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück ist. Die zu $\mathbf{x}$ inverse Abbildung $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **stereographische Projektion**.
- Sei $\mathbf{y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ analog definiert, indem man statt $(0, 0, 1)$ den Punkt $(0, 0, -1)$ verwendet. Bestimmen Sie die Abbildung $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ explizit und verifizieren Sie, daß diese Abbildung differenzierbar ist. Was ist der maximale Definitionsbereich dieser Abbildung?

Bonusaufgabe. Die **Zykloide** ist die durch

$$\begin{cases} x(t) &= a(t + \sin t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \end{cases}$$

für $t \in \mathbb{R}$ definierte ebene Kurve.

- Zeigen Sie, daß die Zykloide die Kurve ist, die ein Punkt auf dem Rand eines Rades vom Radius a beschreibt, das auf der Gerade $y = 2a$ abrollt, wobei für $t = 0$ der genannte Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ liegt.
- Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide auf dem Zeitintervall $[0, t]$ für $0 \leq t \leq \pi$.
- Berechnen Sie explizit die Evolvente der Zykloide durch Verwendung von Aufgabe 2 (b) mit $c = 0$ — beachten Sie, daß t nicht die Bogenlänge ist. Zeigen Sie damit explizit, daß diese Evolvente wieder eine Zykloide ist.

Bemerkung: Diese Konstruktion spielte eine wichtige Rolle in Christian Huygens' (1629–1695) Konstruktion einer Pendeluhr von hoher Präzision.

Abgabe: Mittwoch 5.11.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).