Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Man betrachte eine Kurve in der (r, z)-Ebene gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t))$ für $t \in (a, b)$ mit $r(t) > 0$. Wenn diese um die z-Achse gedreht wird, erhalten wir eine **Rotationsfläche**. Diese Fläche können wir wie folgt parametrisieren. Dazu ist es nützlich, die Parameter t und φ zu verwenden, wobei t die Position auf der Kurve bestimmt und φ den Drehwinkel. Dann können wir definieren

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, z(t)) \quad \text{für } t \in (a, b) \text{ und } \varphi \in (0, 2\pi).$$

Die t-Kurven heißen **Meridiane** und die φ-Kurven **Breitenkreise**.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{x}$ ein parametrisches Flächenstück ist, falls $\boldsymbol{\alpha}$ regulär und injektiv ist. Berechnen Sie $\mathbf{x}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial t$, $\mathbf{x}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial\varphi$ und den Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$.

(b) Betrachten Sie die zu $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ gehörende Rotationsfläche für $t \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, daß die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und beschreiben Sie die dort genannten Größen explizit. Wie sieht diese Fläche aus? Beschreiben Sie ihre Meridiane und Breitenkreise in parametrisierter Form.

(c) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten einer Rotationsfläche.

Aufgabe 2. Betrachte die 2-Sphäre S^2 (ohne den Nullmeridian) mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

In der Vorlesung hatten wir ausgerechnet, daß die Koeffizienten des metrischen Tensors gegeben sind durch

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Einträge g^{ij} der inversen Matrix, die Koeffizienten L_{ij} der zweiten Fundamentalform und die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k. Begründen Sie geometrisch, warum keine dieser Größen von φ abhängt.

b.w.

Aufgabe 3. Betrachte eine Rotationsfläche wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix (L_{ij}), die die zweite Fundamentalform beschreibt, ist gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{\dot r^2 + \dot z^2}} \begin{pmatrix} \dot r \ddot z - \dot z \ddot r & 0 \\ 0 & r \dot z \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $\det(L_{ij}) = 0$ genau dann, wenn jeder Meridian eine Gerade ist.

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung der Kurve auf dem Kreiszylinder vom Radius $r > 0$,

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ : x^2 + y^2 = r^2\right\},$$

mit der Spur $\{x^2 + y^2 = r^2,\ z = z_0\}$.

(b) Zeigen Sie, daß jede nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Spur auf der 2-Sphäre S^2 (vom Radius 1) die gleiche konstante Normalkrümmung hat (bei gegebener Wahl des Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}$). Was ist der Wert dieser Normalkrümmung? Wie lautet die Antwort, wenn man eine Sphäre vom Radius r betrachtet?

(c) Wir parametrisieren die 2-Sphäre S^2 (bis auf den Nullmeridian) durch

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \varphi \in (0, 2\pi),$$

so daß θ der Breitengrad ist. Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der Breitenkreise $\varphi \mapsto \mathbf{x}(\theta_0, \varphi)$ in Abhängigkeit vom Breitengrad θ_0. Beachten Sie, daß φ i. a. nicht der Bogenlängenparameter des Breitenkreises ist.

Abgabe: Mittwoch 19.11.25

bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen

im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).