WS 2025/26 Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Es sei $s \mapsto \gamma(s)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Spur auf S^2, d. h. es gilt $|\gamma| \equiv 1$.

(a) Zeigen Sie, daß die Normalkrümmung k_n von γ konstant ist. Welchen Wert hat die Normalkrümmung?

(b) Angenommen, die geodätische Krümmung k_g von γ ist konstant. Was läßt sich dann über die Krümmung k und die Torsion τ von γ aussagen? Folgern Sie, daß γ ein Kreis (oder ein Kreisbogen) ist.

(c) Was ist der Radius dieses Kreises, wenn $k_g \equiv 0$ gilt? Zeigen Sie damit, daß jede Geodätische auf S^2 ein Großkreis(-bogen) ist, d. h. der Durchschnitt von S^2 mit einer Ursprungsebene.

Aufgabe 2. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Für $p, q \in M$ definieren wir

$$d(p,q) := \inf L(\gamma),$$

wobei das Infimum über alle stetigen und stückweise C^1-Kurven $\gamma\colon [a,b] \to M$ mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$ genommen wird. Mit $L(\gamma)$ ist die Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

von γ bezeichnet. Das Definitionsintervall $[a,b]$ darf von der Kurve abhängen.

Zeigen Sie, daß d eine Metrik definiert, d. h.

(i) $d(p,q) \geq 0$, mit Gleichheit genau für $p = q$.

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$.

(iii) Dreiecksungleichung: $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ für $p, q, r \in M$.

Beachten Sie, daß es im allgemeinen keine Kurve γ von p nach q mit $L(\gamma) = d(p,q)$ gibt.

Aufgabe 3. (a) Sei M eine Fläche und Π eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die M in einer Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ schneidet. Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische ist, falls Π eine Symmetrieebene von M ist,

(i) mittels der Eindeutigkeit von Geodätischen bei gegebenen Anfangsbedingungen,

(ii) durch Ausnutzung der Tatsache, daß $\boldsymbol{\gamma}$ eine ebene Kurve in der Symmetrieebene ist.

Mit Symmetrieebene ist gemeint, daß M unter der Spiegelung an Π auf sich selbst abgebildet wird.

(b) Zeigen Sie, daß jede Gerade im $\mathbb{R}^3$, die in einer Fläche enthalten ist, auf dieser Fläche eine Geodätische ist.

(c) Finden Sie möglichst viele (explizite) Geodätische auf der Fläche $\left\{x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie ein Flächenstück von der Form

$$\mathbf{x}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, f(u^1, u^2)\right),$$

d. h. einen Graphen. Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform (g_{ij}), (L_{ij}). Bestimmen Sie das Christoffel-Symbol Γ_{11}^2 sowohl extrinsisch (d. h. mittels der ursprünglichen Definition) als auch intrinsisch (d. h. mittels Satz 3.5).

Bonusaufgabe. Finden Sie möglichst viele Geodätische in dem Flächenstück

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \longmapsto \mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2) \in \mathbb{R}^3.$$

Skizzieren Sie diesen Graphen.

Abgabe: Mittwoch 26.11.25

bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen

im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).