

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei α eine Kurve auf einer Fläche M von $p = \alpha(0)$ nach $q = \alpha(1)$. Für $\mathbf{X}_0 \in T_p M$ sei $\mathbf{X}(t)$, $t \in [0, 1]$, die Parallelverschiebung von $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ entlang α . Definiere $\alpha^\sharp: T_p M \rightarrow T_q M$ durch $\alpha^\sharp(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}(1)$. Zeigen Sie:

- (a) α^\sharp ist eine lineare Abbildung.
 (b) α^\sharp ist eine Isometrie, d. h.

$$\langle \alpha^\sharp(\mathbf{X}_0), \alpha^\sharp(\mathbf{Y}_0) \rangle = \langle \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0 \rangle \text{ für alle } \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0 \in T_p M.$$

- (c) α^\sharp ist ein Isomorphismus.

α^\sharp heißt der durch α definierte **Parallelismus**.

Aufgabe 2. Man betrachte die obere Halbebene

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

mit der durch $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ gegebenen sogenannten **hyperbolischen Metrik**.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß sich \mathbb{R}_+^2 mit dieser Metrik nicht als Fläche im \mathbb{R}^3 realisieren läßt, d. h. es gibt kein parametrisches Flächenstück $\mathbf{x}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, so daß $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Dennoch lassen sich alle intrinsischen Überlegungen bzgl. dieser Metrik durchführen.

- (a) Verifizieren Sie die folgenden Ausdrücke für die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 1/y,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -1/y.$$

- (b) Die Geodätische γ mit $(\gamma^1(0), \gamma^2(0)) = (x_0, 1)$ und $((\gamma^1)'(0), (\gamma^2)'(0)) = (0, 1)$ ist gegeben durch $\gamma^1 \equiv x_0$, $\gamma^2(s) = e^s$.
- (c) Die Geodätische γ mit $(\gamma^1(0), \gamma^2(0)) = (a, r)$ und $((\gamma^1)'(0), (\gamma^2)'(0)) = (r, 0)$ ist gegeben durch $\gamma^1(s) = a + r \tanh s$, $\gamma^2(s) = r / \cosh s$. Zeigen Sie außerdem, daß γ ein Halbkreis in \mathbb{R}_+^2 (bzgl. der euklidischen Metrik) ist mit Mittelpunkt auf der x -Achse.
- (d) Sei $\mathbf{X}_0 = (0, 1)$ ein Tangentialvektor im Punkt $(0, 1)$ von \mathbb{R}_+^2 . (\mathbf{X}_0 ist Einheitsvektor in $T_{(0,1)}\mathbb{R}_+^2$ bzgl. der hyperbolischen Metrik.) Sei $\mathbf{X}(t)$ die Parallelverschiebung von \mathbf{X}_0 längs der Kurve $x = t$, $y = 1$. Zeigen Sie, daß der Winkel zwischen $\mathbf{X}(t)$ und der y -Achse gleich t ist.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Sei γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche M , und sei \mathbf{S} die intrinsische Normale entlang γ . Zeigen Sie, daß \mathbf{S} genau dann parallel entlang γ ist, wenn γ eine Geodätische ist.

(b) Sei γ wie in (a), mit Krümmung $k \neq 0$. Sei \mathbf{X}_N die Komponente von \mathbf{N} tangential an M . Zeigen Sie, daß $\mathbf{X}_N = \mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$, und daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $\mathbf{X}_N \equiv 0$,
- (ii) γ ist eine Geodätische,
- (iii) \mathbf{X}_N ist parallel entlang γ .

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform und die Weingarten-Abbildung der 2-Sphäre vom Radius r mittels der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad \text{für } (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

(b) Sei a eine positive reelle Zahl. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform des Helikoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

und des Katenoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av).$$

Abgabe: Donnerstag 4.12.25 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).