Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

# Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 8

**Aufgabe 1.** In der Vorlesung hatten wir die Weingarten-Abbildung $L$ des Helikoids

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, cu)$$

als Matrix $(L^i_j)$ bzgl. der Basis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ berechnet. Bestimmen Sie diese Matrix alternativ mittels der Weingarten-Gleichungen $\mathbf{n}_k = -L(\mathbf{x}_k)$.

**Aufgabe 2.** Der 2-Torus $T^2$ ist die Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation des Kreises $(r-2)^2 + z^2 = 1$ in der $(r,z)$-Ebene um die $z$-Achse entsteht. Er läßt sich (bis auf einen Meridian und einen Längenkreis) parametrisieren durch

$$\mathbf{x}(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)\,, \quad (u,v) \in (0,2\pi).$$

Bestimmen Sie die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung.

**Aufgabe 3.** (a) Zeigen Sie, daß die Isometrien $\varphi\colon M \to M$ einer Fläche $M$ in natürlicher Weise eine Gruppe bilden, die sogenannte **Isometriegruppe** von $M$.

(b) Zeigen Sie, daß die Isometriegruppe von $S^2$ gleich der Gruppe $\mathrm{O}(3)$ der orthogonalen $(3\times 3)$-Matrizen ist.

**Aufgabe 4.** Ein Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ heißt **konforme Abbildung**, falls

$$\langle d\varphi\,(\mathbf{X})\,, d\varphi\,(\mathbf{Y})\rangle_{\varphi(p)} = \lambda(p)\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle_p$$

für alle $p \in M$ und $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_pM$, wobei $\lambda\colon M \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion ist. Analog zum Begriff der lokalen Isometrie spricht man von **lokal konformen** Abbildungen. Zeigen Sie, daß $\mathrm{S}^2$ lokal konform zur Ebene ist.
Hinweis: stereographische Projektion.

Abgabe: Donnerstag 11.12.25 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).