WS 2025/26

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Flächenstücke

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, \log t) \\ \text{und} \qquad &\mathbf{y}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, \varphi) \end{aligned}$$

für $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times (0,2\pi)$.

(a) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten (g_{ij}) bzw. $(\widetilde{g}_{ij})$ für die beiden Flächenstücke, und zeigen Sie damit, daß $\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}$ *keine* Isometrie ist.

(b) Zeigen Sie, daß $K\left(\mathbf{x}(t,\varphi)\right) = K\left(\mathbf{y}(t,\varphi)\right) = -1/(1+t^2)^2$.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Umkehrung des *theorema egregium* i. a. falsch ist: Ein Diffeomorphismus $\varphi\colon\ M \to N$ zwischen Flächen, der $K_M(p) = K_N(\varphi(p))$ erfüllt für alle $p \in M$, muß keine lokale Isometrie sein.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Poincaré-Scheibe, d. h. $U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\ u^2+v^2<1\right\}$ mit der Metrik

$$(g_{ij}(u,v)) = \begin{pmatrix} 4/(1-u^2-v^2)^2 & 0 \\ 0 & 4/(1-u^2-v^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wie in Aufgabe 2 von Übungsblatt 7 ein Beispiel für eine abstrakt definierte Fläche, d. h. es gibt keine Fläche $\mathbf{x}\colon\ U \to \mathbb{R}^3$, so daß $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle$ die erste Fundamentalform ist. Wir nennen die so definierte Metrik die **hyperbolische Metrik** auf U.

(a) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole.

(b) Zeigen Sie, daß Durchmesser von U und Kreisbögen, die den Einheitskreis $u^2+v^2=1$ orthogonal schneiden, Geodätische sind, und daß jede Geodätische von dieser Form ist.

Aufgabe 3. Wir fassen die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ aus Aufgabe 2 von Blatt 7 und die Poincaré-Scheibe U aus der vorigen Aufgabe als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, daß durch

$$\varphi(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^2_+ \to U$ definiert wird, der bezüglich der jeweiligen hyperbolischen Metrik eine Isometrie ist.

b.w.

Aufgabe 4. Parametrisieren Sie das einschalige Hyperboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

als Rotationsfläche und bestimmen Sie damit die Gaußkrümmung. Verifizieren Sie insbesondere, daß diese Gaußkrümmung in jedem Punkt des Hyperboloids negativ ist.

Bonusaufgabe. Beschreiben Sie möglichst viele Isometrien des Hyberboloids auf sich selbst. Begründen Sie jeweils die Isometrieeigenschaft.

Abgabe: Donnerstag 18.12.25 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).