WS 2025/26

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Sei M eine Fläche, die durch Koordinatenumgebungen $U_1, U_2 \subset M$ überdeckt wird. Nehmen Sie an, $U_1 \cap U_2$ hat zwei Zusammenhangskomponenten W_1, W_2, und daß die Jacobische Matrix des Koordinatenwechsels positive Determinante in W_1 hat und negative Determinante in W_2. Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist. Dies zeigt insbesondere, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

(b) M_2 sei eine orientierbare Fläche und $\varphi\colon M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung, die ein lokaler Diffeomorphismus ist bei jedem $p \in M_1$. Zeigen Sie, daß M_1 orientierbar ist.

Aufgabe 2. Ein n-gon ist eine stückweise glatte, reguläre Kurve auf einer Fläche M, deren n glatte Segmente Geodätische sind, und die ein Gebiet in M berandet, das homöomorph zu einer 2-Scheibe ist.

(a) Sei M eine Fläche mit $K \leq 0$. Zeigen Sie, daß es kein n-gon für $n = 0, 1, 2$ gibt. (Ein 0-gon ist eine geschlossene Geodätische, die eine Scheibe in M berandet.)

(b) Finden Sie ein Beispiel einer Fläche mit $K < 0$, auf der eine geschlossene Geodätische existiert.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x}\colon U \to M$ einer Fläche mit metrischen Koeffizienten $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$ mit $\lambda > 0$ und $g_{12} \equiv 0$.

Zeigen Sie, analog zum Beweis von Lemma 4.5, daß die Gauß-Krümmung in solchen lokalen Koordinaten gegeben ist durch

$$K = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda^4} - \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{\lambda^3}.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung der Poincaré-Scheibe aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 9. Sie dürfen dabei verwenden, daß man die hyperbolische Metrik auf der Poincaré-Scheibe *lokal* als Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ realisieren kann.

Abgabe: Donnerstag 15.1.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).